CAMPOS DE VETORES CONFORMES SOBRE FORMAS ESPACIAIS

Manfinapul Armando Blez [1], Joao Francisco da Silva Filho [2]

RESUMO

Opresentetrabalhoabordaoscamposdevetoresconformes(oucamposconformes)sobreformasespaciais(espaçoEuclidiano,esferaeespaçoHiperbólico),destacandooscamposdevetoresconformesgradientes,camposdeKillingecamposhomotéticos.Demodogeral,camposdevetoresconformessobreespaçosRiemannianossãocamposdevetoressuaves,cujaderivadadeLiegeraumtensordeordem2(dois),múltiplodamétricaRiemannianadoreferidoespaço.Deve-se ressaltar que os campos conformes encontram-seemformasespaciais(espaçoEuclidiano,esferaeespaçohiperbólico),nassuperfíciesderevolução,nosespaçoshomogêneos,etc.Naperspectivadeestudaroscamposdevetoresconformessobreformasespaciais,especialmentesobreoespaçoEuclidiano,esferaEuclidianaeespaçoHiperbólico,seráusadaumaabordagembemmaiselementarqueaabordagem usual. Ademais, pretende-severificararelaçãoentreoscamposconformesgradientesnoespaçoEuclidianocomoscamposvetoresconformesgradientessobreaesferaEuclidianaesobreoespaçoHiperbólico,procurandocompararassuasrespectivaspropriedadesemcadaformaespacial,atravésdemudançaconformedemétricaRiemanniana.

Palavras-chave:

Formas espaciais. Campos de vetores conformes. Fator conforme.

[1] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN, Discente, e-mail: armandoblez@gmail.com
[2] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN, Docente, e-mail: joaofilho@unilab.edu.br

INTRODUÇÃO

As formas espaciais (ou *space forms*) são espaços Riemannianos completos com curvatura seccional constante, cujos exemplos mais conhecidos são espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico. Os campos conformes sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores, cuja derivada de Lie resulta em um tensor de ordem 2 (dois), múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço. Os campos conformes constituem uma generalização dos campos de Killing e dos campos homotéticos, já que os campos de Killing são campos conformes com fator conforme nulo, enquanto os campos homotéticos são campos conformes com fator conforme constante.

Os campos de vetores conformes aparecem com bastante frequência na Geometria Diferencial, por exemplo, no estudo de imersões sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera e espaço Hiperbólico), nos produtos diretos, produtos-warped, espaços homogêneas, espaços de Einstein e ainda em alguns fluxos geométricos (fluxo de Yamabe e fluxo de Ricci).

Estes campos de vetores também estão relacionados à curvatura escalar do espaço Riemanniano, no qual estão definidos, conforme podemos conferir nos resultados obtidos por Tashiro (1965) e Obata/Yano (1970). Nas formas espaciais, encontram-se alguns exemplos, dentre eles destacam-se os exemplos construídos por Heintze (1988), partindo das chamadas funções suporte.

METODOLOGIA

Inicialmente, realizamos um estudo preliminar sobre alguns tópicos de Álgebra Linear, Cálculo Vetorial, Análise Real e elementos de Geometria Riemanniana, contemplando o período de aquisição dos pré-requisitos necessários. Na sequência dos trabalhos, passamos a nos concentrar no estudo dos campos de vetores conformes sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico), partindo do espaço Euclidiano e usando mudança conforme de métrica. Deve-se ressaltar que buscou-se utilizar as ferramentas mais elementares possíveis e apresentar uma abordagem mais simples.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conformeinicialmenteplanejado,construímosexpressõesquedescrevemoscamposdevetoresconformesgradientessobreformasespaciaissimplesmenteconexas(espaçoEuclidiano,esferaEuclidianaeespaçoHiperbólico),atravésdafunçãopotencialedofatorconforme(oufatordeconformidade),quesãoestruturassuficientesparageraraexpressãodocampodevetorescorrespondente.

Primeiramente,revisitamosaexpressãoquedescreveoscamposdevetoresconformesgradientessobreoespaçoEuclidiano,atravésdafunçãopotencialedofatorconforme,verificandoaindaquenesseespaço,taiscamposdevetoressãosemprehomotéticos.Atravésdeumamudançaconformedemétrica,obtemosaindaosquocientesdeexpressõespolinomiaisquedescrevemoscamposconformesgradientesnaesferaEuclidianaenoespaçoHiperbólico,cujonúmerodevariáveiscoincidecomadimensãodasreferidasformasespaciais.

Porfim,foirealizadoaindaumestudomaisaprofundado,revendoalgunsresultadossobrecamposconformesgradientes,quepermitemcaracterizarespaçosRiemannianos,identificandoemquecondiçõespode-seconcluirqueumespaçoRiemannianopossuiamesmageometriadoespaçoEuclidiano,daesferaEuclidianaoudoespaçoHiperbólico.

CONCLUSÕES

Diante do estudo realizado e do trabalho desenvolvido ao longo do período de vigência do projeto, deduzimos expressões gerais que permitem descrever as funções potenciais de qualquer campo de vetores conforme gradientes sobre formas espaciais simplesmente conexas (espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico). Estas expressões consistem de um quociente de expressões polinomiais, cujo número de variáveis coincide com as dimensões das referidas formas espaciais. Deve-se ainda ressaltar a estreita relação entre as expressões dos campos de vetores conformes gradientes entre cada uma das referidas formas espaciais, estabelecida através de mudança conforme de métrica Riemanniana.

AGRADECIMENTOS

AgradecemosaoProgramaInstitucionaldeBolsasdeIniciaçãoCientíficadaUniversidadedaIntegraçãoInternacional da Lusofonia Afro-BrasileiraPIBIC/UNILAB,pelosuportefinanceiroquepossibilitouarealizaçãodoprojeto“CamposdeVetoresConformesSobreFormasEspaciais”.

REFERÊNCIAS

BESSE,A.L.EinsteinManifolds.Berlin:Spring-Verlag,2008.(ClassicsMathematics)

CARMO,M.P.GeometriaRiemanniana,3ªEdição.RiodeJaneiro:IMPA,2005.(ProjetoEuclides)

CHEEGER,J.;GROMOLL,D.Thesplittingtheoremformanifoldsofnonnegative Ricciccurvature.JournalofDifferential Geometry,v.6,p.119-128,1971.

CHEEGER,J.andCOLDING,T.LowerboundsonRiccicurvatureandthealmostrigidityofwarpedproducts.AnnalsofMathematics,v.144,(1996)no.1,p.189-237.

GUIDORIZZI,H.G.Umcursodecálculo- Volume3,5ªEdição.Riodejaneiro:LTC,2002.

HAMILTON,R.S.TheRicciflowindimensionthree.JournalDiferentialGeometry,v.17,p.255-306,1982.

HEINTZE,E.Extrinsicupperboundsforλ_1.MathematischesAnnalen,v.280,p.389-402,1998.

LIMA,E.L.AnáliseReal–Volume2:Funçõesdenvariáveis,6ªEdição.RiodeJaneiro:SBM,2010.

LIMA,E.L.CursodeAnálise-Volume2,10ªEdição.RiodeJaneiro:IMPA,2006.

OBATA,M.;Yano,K.ConformalChangesofRiemanniansMetrics.JournalDiferentialGeometry,v.4,p.53-72,1970.

OLIVEIRA,F.;PEREIRA,O.;SILVA,M.B.;SILVAFILHO,J.CamposConformessobreoEspaçoHiperbólico.Acarape,2018(ArtigoSubmetido).

O'NEILL,B.Semi-RimannianGeometrywithapplicationstorelativity.NewYork:AcademicPress,1983.

PETERSEN,P.;WYLIE.W.OngradientRicciSolitonswithsymmetry.ProceedingsoftheAmericanMathematicalSoci

ety,v.137,p.2085-2092,2009.

SILVAFILHO,J.F.SolitonsdeRiccieMétricasquasi-EinsteinemVariedadesHomogêneas.2013,83f.Tese(Doutorado)-Pós-GraduaçãoemMatemática,UniversidadeFederaldoCeará,Fortaleza,2013.

SILVA,M.B.;SILVAFilho,J.F.Umproblemainteressantesobrecongruênciadetriângulos.RevistadoProfessordeMatemática,v.93,p.42-44,2017.

SILVAFilho,J.F.Quasi-EinsteinmanifoldsendowedwithaparallelvectorField.Fortaleza,2015.MonatsheftefurMathematik,v.178(2015).p.01-16.

TASHIRO,Y.CompleteRiemannianmanifoldsandsomevectorfields.TransactionsoftheAmericanMathematicalSociety,v.117,p.251-275,1965.