SUPERFÍCIES MÍNIMAS E A REPRESENTAÇÃO DE WEIERSTRASS

Paulo Ricardo Goncalves Pereira [1], Rafael Jorge Pontes Diógenes [2]

RESUMO

O presente trabalho trata de conceitos referentes a geometria diferencial e superfície mínima. Foi desenvolvido durante um projeto de iniciação científica da UNLAB-PIBIC/UNILAB, intitulado superfícies mínimas. Tais superfícies possuem curvatura média identicamente nula, elas são um dos principais objetos de estudo da geometria diferencial. As primeiras superfícies mínimas, foram descobertas por Euler e Lagrange. Obter exemplos de tais superfícies, era algo considerado difícil, até mesmo para os casos considerados mais simples, o caso do gráfico de uma função. Após mais de 100 anos da definição de superfície mínima, foi que Weierstrass desenvolveu um método que descrevia todas as superfícies mínimas, tal método é conhecido como representação de Weierstrass, que foi o objeto principal de estudo deste trabalho. Weierstrass, obteve uma relação entre superfícies mínimas e funções holomorfas, isto é, ele obteve uma relação entre tais superfícies e análise complexa. Através de estudo bibliográfico, mostramos algumas propriedades de superfícies regulares e mínimas, bem como os exemplos mais conhecidos de superfícies mínimas como o plano, catenoide (única superfície mínima de revolução não trivial), superfície de Scherk, superfície de Enneper, além de algumas aplicações das mesmas em nosso cotidiano.

Palavras-chave:

Superfícies mínimas. Curvatura média. Representação de Weierstrass.

[1] UNILAB, ICEN, Discente, e-mail: pauloricardodotimao@hotmail.com
[2] UNILAB, ICEN, Docente, e-mail: rafaeldiogenes@unilab.edu.br

INTRODUÇÃO

Em geometria diferencial, um dos assuntos mais estudados são problemas relacionados à superfícies mínimas, este fato não é recente. Tal interesse surgiu no século XVIII com Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), que propôs em 1760 o seguinte problema: Dado uma curva fechada C (sem auto interseções) qual superfície com C como bordo tem área mínima? Bem, Lagrange propôs tal problema como uma “necessidade" de um método desenvolvido por ele para minimizar certas quantidades, como área, comprimento e energia, este método hoje em dia é conhecido como Cálculo das variações. Já em 1740, Euler descobriu uma superfície que, para um certo volume, tinha área mínima, que no caso era a catenoide. Desde então foi se desenvolvendo o estudo relacionado a superfícies que minimizassem áreas. Ainda no século XVIII, o matemático francês J. B. M. C. Meusnier de la Place (1754 - 1793) descobriu mais duas superfícies mínimas além do plano, já descoberto por Lagrange, a helicoide e o catenoide como havia previsto Euler. Posteriormente o matemático alemão Heinrich Ferdinand Scherk (1798 - 1885) descobriu mais uma superfície mínima a superfície de Scherk. Por muito tempo ficaram escassos os exemplos de superfícies mínimas, até então apenas o plano, catenoide e a helicoide, pois superfícies mínimas não era algo simples de se obter, só no século XIX o físico belga J. A. F. Plateau (1801 - 1883) começou a conduzir suas pesquisas com bolhas de sabão para obter superfícies mínimas e com isso o problema já conhecido por Euler e Lagrange ficou conhecido como problema de Plateau que, sucintamente, consiste em mergulhar um contorno, digamos feito de arame, em um recipiente com água e sabão, de tal modo que ao se retirar o contorno do recipiente, tenha-se formado uma superfície, que por motivos físicos é a superfície de menor área que pode ser formado para tal contorno.

O estudo de superfícies mínimas ainda teve colaboração brasileira, por exemplo, em 1982 o matemático Celso José da Costa descobriu uma nova superfície mínima denominada superfície Costa. A descoberta feita pelo brasileiro se deu através dos estudos do matemático alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897), mais precisamente, o que conhecemos na geometria diferencial por representação de Weierstrass, objeto de estudo deste trabalho. Os estudos feitos por Weierstrass utiliza cálculo com variáveis complexas para descrever todas as superfícies mínimas, diminuindo os problemas que se tinham para encontrar tais superfícies. E com isso, abordaremos alguns conceitos de superfícies mínimas e então obter a representação de Weierstrass que possibilita encontrar todas as superfícies mínimas. A importância dos estudos de superfícies mínimas podem ser vista no nosso próprio cotidiano, pois muitas embalagens de bebidas, alimentos, por exemplo, utilizam o conceito de superfícies mínimas, isto é, para minimizar o custo da produção de recipientes para armazenamento de produtos, e com isso, as pessoas podem comprar tais produtos por um preço mais baixo, devido aos estudos feitos em geometria diferencial, mais especialmente, em superfícies mínimas.

METODOLOGIA

Iniciamos o projeto de pesquisa com uma revisão bibliográfica de curvas, tanto no plano como no espaço, uma vez que toda a teoria utilizada neste trabalho, usa fortemente seus conceitos e propriedades. Neste momento, viu-se coisas mais básicas, como por exemplo a definição de uma curva, na qual pode-se defini-la como, uma aplicação da reta no plano ou no espaço. Além disso, estudou-se parametrizações de curvas, um ponto muito importante nestes estudos, e com isso pode-se chegar as conhecidas fórmulas de Frenet, que são muito importantes em geometria, uma vez que tem-se o chamado triedro de Frenet, que pode ser vista como uma base para o espaço euclidiano. As fórmulas de Frenet são compostas por características da curva, como curvatura, vetor tangente e vetor normal. O vetor tangente a curva ou vetor velocidade, é o vetor dado por um limite, obviamente tal limite coincide com a derivada. Também foi visto que pode-se reparametrizar a curva por comprimento de arco, isto equivale a dizer que o módulo do vetor tangente vale 1, ou fisicamente falando, equivale a dizer que uma partícula que tem a curva como trajetória, percorre esta com velocidade

1u.m. Além disso, viu-se que o vetor velocidade e o vetor aceleração de vetores parametrizados pelo comprimento de arco (PCA), são ortogonais, ou seja, são perpendiculares. Com isso conclui-se que o vetor normal a curva é paralelo ao vetor aceleração, como mostra a figura 1.

Uma vez que o vetor tangente é perpendicular ao vetor aceleração, para os casos de curvas PCA, tem-se que o vetor aceleração é paralelo ao vetor normal a curva, já que este também é ortogonal ao vetor tangente, e com isso, tem-se um fator de proporcionalidade, que chamamos de curvatura ***k***, que é a medida do quão a curva deixa de ser uma reta em cada ponto. Por usa vez, o produto vetorial dos vetores tangentes e normal, ambos PCA, gera um novo vetor, denominado vetor binormal, que é ortogonal a ambos os vetores, devido as propriedades de produto vetorial, e com isso, formam uma base para o espaço euclidiano de 3 dimensões. Viu-se também que, derivando o vetor binormal, temos que o vetor resultante é ortogonal ao vetor tangente, ou seja, é paralelo ao vetor normal, e consequentemente proporcional, e com isso, chamamos este fator de proporcionalidade de torção **t**, que, sucintamente, é a medida de quanto a curva se torce em cada ponto, ressalta-se que a torção só faz sentido para curvas no espaço.

Para o prosseguimento do projeto, iniciou-se os estudos sobre isometrias no espaço, ou seja, objetos de mesma medida no espaço. Em seguida, estudou-se um importante teorema em geometria diferencial, que é o teorema fundamental das curvas, a qual, basicamente, nos diz que, no caso de uma curva plana, tendo uma curva x, e uma outra curva y, tal que, em um mesmo ponto p, ambas tenham a mesma curvatura k, isto é, a mesma taxa de variação do ângulo tangente à curva, então a menos de um "movimento rígido" as curvas são igual, este tal movimento rígido nada mais é que aplicarmos uma transformação linear, digamos M, que pode, ou não, rotacionar a curva, e fazer uma translação (somar com um escalar), assim, teremos que $x=M(y)+c$, com c constante, isto mostra que as curvas são invariantes geométricos, ou seja, preservam suas propriedades, mesmo com movimentos rígidos.

E logo após, deu-se partida ao estudo de Superfícies parametrizadas, isto é, uma aplicação do plano no espaço, que associa a cada par de pontos do plano, um terno de pontos no espaço.

Alguns dos objetos mais importantes no estudo, foram a primeira e segunda forma fundamental. A primeira forma, basicamente faz medições sobre as superfícies. Ressalta-se que a cada ponto p temos uma plano tangente a superfície neste ponto, denotado por T_pS, e consequentemente, temos vários vetores pertencentes a este plano.

Sendo v um vetor de tal plano, a primeira forma fundamental é calculada pelo produto escala de v com v, ou seja, é dado pelo quadrado da norma de v, $|v|^2$. Já a segunda forma fundamental, pode ser calculado pela derivada do vetor normal unitário $N(t)$, que é dado pela composição de N com uma curva sobre a superfície, como mostrado na figura 3.

Estas formas fundamentais, foram de alta relevância para nosso projeto, pois destas, obtêm-se os chamados coeficientes das formas fundamentais, que são utilizados nos cálculos de superfícies mínimas. Um exemplo interessante da aplicabilidade destas formas fundamentais, seria o fato de podermos medir a área da superfície, apenas com elas.

Posteriormente, viu-se algumas aplicações da segunda forma fundamental e com isso, deu-se início ao estudo a uma das partes mais importante da pesquisa, que são as curvatura de Gauss e curvatura Média. Estas duas curvaturas utilizam-se das duas formas fundamentais estudadas, em particular, a curvatura média é quem possibilita encontrar as superfícies mínimas, pois toda superfície mínima possui curvatura média identicamente nula.

Estas curvaturas, utilizam-se das chamadas direções principais, que são duas curvas sobre a superfície, que possuem a maior e a menor curvatura possível para tal superfície. A curvatura média é a média da soma das duas curvaturas principais, consequentemente, se, em suma superfície, as curvaturas são diferentes de zero, então devem ser idênticas a menos de um sinal para representar uma superfície mínima. Além disso, estudou-se o significado do porquê da curvatura média nula, representar uma superfície mínima, viu-se também que o nome "superfície mínima" nem sempre está relacionado com a superfície que possui a menor área, pois para garantir isto, deve-se estudar a estabilidade da superfície, vale ressaltar, que existem muitas questões relacionadas aos estudos sobre superfícies mínimas, a mais conhecida, foi proposta por Lagrange, na qual ele dava um contorno (curva) e perguntava qual a superfície que tinha a menor área tendo como bordo tal contorno. E por aspectos históricos, foi mantido o nome de superfície mínima, sendo que nem sempre o nome condiz com a realidade.

Posteriormente, para dar continuidade com a pesquisa estudou-se o cálculo com variáveis complexas, pois o objetivo principal do projeto, a representação de Weierstrass, é baseada no espaço complexo. Basicamente, um número complexo é da forma: $z = a+bi$ onde a e b são números reais e i representa a raiz quadrada de -1, todo número complexo possui uma parte real e uma parte imaginária. Tem-se o plano complexo como sendo a plano já conhecido bidimensional dos reais.

A partir de Março, começou-se a estudar os principais exemplos de superfícies mínimas, bem como sua forma e características geométricas. E posteriormente foi dado início ao estudo da Representação de Weierstrass. Esta representação é uma ferramenta que relaciona as superfícies mínimas com funções holomorfas, ou seja, funções complexas que possuem derivadas parciais contínuas e obedecem as equações de Cauchy-Riemann.

Dizemos que uma parametrização é Isotérmica, se as normas dos vetores da parametrização da superfície são iguais, ou seja, $|X_u|=|X_v|$, onde (u,v) são as variáveis da parametrização da superfície e também, devemos ter que X_u e X_v são ortogonais. Além disso, há um teorema que garante a existência de parametrizações isotérmicas para toda superfície, embora tal parametrização descreva apenas uma parte da superfície.

A partir destes conceitos, pode-se mostrar várias propriedades sobre superfícies isotérmicas, assim como, que há um funções complexas que relacionam as superfícies mínimas com funções holomorfas. Daí, tira-se propriedades que as funções holomorfas devem satisfazer para caracterizar uma superfície mínima, como por exemplo, que o somatório dos quadrados destas funções deve ser igual a zero. Mais sucintamente, as coordenadas da superfície mínima é dado pela parte real da integral dada por:

onde f e g são as funções holomorfas.

Posteriormente, a estudou-se alguns dos exemplos mais conhecidos de superfícies mínimas com a Representação, como por exemplo a superfície de Enneper, de Scherk, o Helicóide, o Catenóide, entre outros. Através desta representação, é fácil ver, como as funções holomorfas podem facilitar os cálculos, para obter uma superfície mínima. por exemplo, a superfície mínima de Enneper, possui em uma de suas formas parametrizadas a forma

Já suas funções holomorfas são $f=1$ e $g=z$, que são funções bem simples de se integrar.

Em Maio, foi estudado mais um pouco das condições do Teorema da representação de Weierstrass, como por exemplo, as condições de existência das funções f e g, e o fato da representação, às vezes, não funcionar para superfície planas e se de fato a representação não funciona para estas, o que de fato não é verdade, tudo se deve por causa da construção das funções f e g.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através dos estudos da representação de Weierstrass, pôde-se observar o quão esta facilita os cálculos de obtenção de superfícies mínimas, algo que antes era difícil, por outro lado, foi necessário vários aprofundamentos nas teorias da Geometria Diferencial e análise complexa, já que ambas são usadas fortemente no desenvolvimento da Representação.
Com o projeto, foi possível escrever as principais superfícies mínimas com o método de Weierstrass, sendo que, todos os cálculos necessários para esse fim foram desenvolvido, fazendo com que o projeto tivesse um importante papel para todo aquele que se interessa em estudar tais superfícies com um olhar do espaço complexo, até porque é a maneira menos trabalhosa.

CONCLUSÕES

O referido trabalho proporcionou ao bolsista uma inserção na vida científica da matemática, podendo compreender os conceitos básicos da Geometria diferencial.

A representação de Weiestrass mostra-se uma ferramenta poderosa para gerar superfícies mínimas. Ela faz uma ligação não tão trivial de ser percebida, que é a conexão entre superfícies mínimas e as funções holomorfas. De fato, toda superfície mínima gera funções holomorfas que satisfazem as hipóteses da representação de Weiestrass e a reciproca é exatamente a representação de Weiestrass, mostrando que se existe funções holomorfas satisfazem algumas condições elas geram uma superfície mínima.

AGRADECIMENTOS

A UNILAB pelos auxílios e bolsas.

REFERÊNCIAS

ÀVILA, Geraldo. Variáveis Complexas e Aplicações. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 2024p.
CARMO, M. P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
TENENBLAT, Keti. Introdução à Geometria Diferencial. 2a. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2008. v. 1. 270p.