



## COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE APLICAÇÕES HOMOGÊNEAS VIA EXPANSÕES FRACIONÁRIAS

Aruna Djafuno<sup>1</sup>  
Rodrigo Mendes Pereira<sup>2</sup>

### RESUMO

Nesse projeto (parcial), executado na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab) entre Novembro de 2023 a setembro de 2024, foram estudadas o comportamento assintótico das aplicações polinomiais próximo dos seus pontos críticos através de expansões fracionárias, ou seja, comparar a geometria dos seus gráficos. O estudo visa classificar tais aplicações detetando características ou invariantes que as caracterizam. A execução desse projeto foi através dos encontros presenciais (às vezes no met.) de orientando com o orientador; Além disso, ele enviava alguns livros sobre o assunto e as listas de exercícios. Durante esse trabalho, foram estudadas e definidas várias condições de equivalência entre funções homogêneas do tipo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Por exemplo, o gráfico da função  $f(x, y) = x^4 + y^2$  e  $f(x, y) = x^2 + y^4$  são equivalentes, quando restringimos o olhar aos seus pontos próximos da origem. Assim, foram definidas e obtidas classificações para estas funções (algumas aplicações com as mesmas invariantes).

**Palavras-chave:** comportamento assintótico; classificação; estudo local; invariantes.

---

Unilab, ICEN, Discente, djafunoa8@gmail.com<sup>1</sup>  
Unilab, ICEN, Docente, rodrigomendes@unilab.edu.br<sup>2</sup>

## INTRODUÇÃO

O uso da correspondência é muito importante para comparar/analisar ou interpretar informações ou objetos que aparentemente não se relacionam. Algumas destas correspondências envolvem expressões analíticas que permitem um estudo mais profundo, permitindo assim, a interpretação de muitos fenômenos naturais, sociais, políticos, entre outros. Essas correspondências têm características distintas que os identificam, dentre as quais existem as chamadas funções.

Nesse trabalho, o foco se restringe ao estudo das funções homogêneas do tipo  $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ . Ou seja, para todo  $t$  natural,  $f(t(x, y)) = t^k f(x, y)$ . O interesse no estudo dessas funções é classificá-las pelas expansões fracionárias; para melhor entendimento, considere o seguinte: Seja função  $f(x, y) = x^2 - 3y^2$  e  $g(x, y) = x^2 - y^2$ . Observe que  $f^{-1}(0) = \{(x, y); x = \pm 3y\}$  e  $g^{-1}(0) = \{(x, y); x = \pm y\}$  são lugares geométricos equivalentes, pois basta transladar um deles. Ou seja, são homeomorfos

## METODOLOGIA

Para execução desse trabalho, foi preciso estabelecer ou revisar alguns conceitos preliminares ligados ao objeto em estudo. E, o orientador introduzia e explicava os conteúdos durante encontros presenciais ou no meet; assim, formulava questões e apresentava exemplos; Também enviava lista de exercícios para resolver e proporcionava reflexão sobre os conteúdos, além de enviar algumas aplicações para os orientandos tentar estudá-las ou classificá-las. Além disso, foram utilizados aplicativos como whatsapp e clas-Rom durante esse trabalho, e Geogebra para auxiliar no estudo da geometria de algumas aplicações. A pesquisa contou também com o estudo de alguns artigos relacionados ao assunto.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Depois de estudo de comportamento de algumas aplicações homogêneas, foram definidas algumas equivalências, dentre as quais a bi-contato equivalente; através desta definição, foi possível obter uma característica dessa equivalência: bi-contato implica zeros das funções bi-Lipschitz homeomorfos. Além disso, foi possível a classificação completa para funções homogêneas cujo sua raiz é apenas um ponto: A multiplicidade é um invariante completo. Também, foi introduzido ferramentas no espaço das curvas paramétricas para obter classificação completa dos polinômios homogêneos cujos zeros são curvas não constantes. Esse último resultado foi obtido considerando que  $f^{-1}(0) = \cup_{i=1}^n C_i$ , onde  $C_i$  são ramos das curvas no plano.

## CONCLUSÕES

Portanto o estudo local de transformações polinomiais homogêneas do plano via expansões fracionárias, além de permitir a classificação de aplicações pelo comportamento assintótico, também possibilitou (pelo estudo das imagens inversas na origem) estabelecer invariantes métricos para aplicações  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ . Esse estudo pode auxiliar futuramente no estudo das funções analíticas. Sugere-se que estudo desse objeto, por esse método, tenha continuidade. Pois pelo que foi possível observar/estudar durante a execução desse trabalho, tem muito a desejar



## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da pesquisa intitulada COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE APLICAÇÕES POLINOMIAIS DO PLANO e executada entre 08/2023 e 09/2024, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e Tecnológica (Pibiti), da Unilab.

## REFERÊNCIAS

- [1] Birbrair, Lev; Fernandes, Alexandre C. G. Metric theory of semialgebraic curves. (English) Rev. Mat. Complut. 13, No. 2, 369-382 (2000). [2] Birbrair, Lev; Fernandes, Alexandre; Grandjean, Vincent; Gabrielov, Andrei Lipschitz contact equivalence of function germs in  $\mathbb{R}^2$ . Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5) 17, No. 1, 81-92 (2017) [3] Birbrair, Lev; Costa, João Carlos Ferreira; Edvalter Senha; Rodrigo Mendes. Finiteness theorem for multi-K-bi-Lipschitz equivalence of map germs. Mathematische Nachrichten, v. 291, p. 2381-2387, 2018. [4] Lipschitz contact equivalence and real analytic functions. Lev Birbrair, Rodrigo Mendes, ano 2018. <https://arxiv.org/abs/1801.05842>. [5] Birbrair, Lev; Mendes, Rodrigo. Multi-K-bi-Lipschitz equivalence in dimension two. Sao Paulo Journal Of Mathematical Sciences. v. 19, p. 449-462, 2024