INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

Antonio Eder Campos Luz[1]
Amanda Angélica Feltrin Nunes[2]

RESUMO

A Análise Funcional é um ramo da Matemática, mais precisamente, da Análise, que trabalha com uma gama de resultados importantes que permite que apliquemos em problemas associados a fenômenos naturais, muitos dos quais têm funções como soluções. Como o conjunto formado por funções são espaços vetoriais de dimensão infinita, surge a necessidade de estudar espaços de dimensão infinita de forma mais efetiva, posto que em Álgebra Linear, em geral, trata essencialmente de espaços vetoriais de dimensão finita, tendo em vista a associação matricial que há. Dessa forma, ao longo desse projeto, foi estudado os Espaços Vetoriais Normados (no contexto de dimensão infinita), em especial, os Espaços de Banach, Operadores Lineares Contínuos, na qual podemos destacar importantes resultados, tais como: Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema da Aplicação Aberta, Teorema do Gráfico Fechado e o Teorema de Hahn-Banach em sua forma analítica e geométrica, além de estudar dualidade, espaços reflexivos e por fim os espaços de Hilbert. Dessa forma, foi de extrema importância apresentações semanais dos materiais estudados para o desenvolvimento do estudo, utilizando como base obras de grandes autores como Botelho, Pellegrino e Teixeira (2011), Brézis, H. (2011), Cavalcanti, Cavalcanti, Homornik (2011), Kreyszig (1989) e Oliveira (2012) que contribuíram para a conclusão da importância desse estudo para o desenvolvimento do conhecimento do estudante de graduação sobre a matemática abstrata, proporcionando assim, um primeiro contato com as noções básicas de Análise Funcional.

Palavras-chave: análise; teoremas; espaços vetoriais.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Campus Auroras, Discente, ederluz@aluno.unilab.edu.br[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Campus Auroras, Docente, amandaafn@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é um ramo da Matemática, especificamente, da Análise, que aborda uma série de resultados importantes aplicáveis a problemas relacionados a fenômenos naturais, muitos dos quais têm funções como soluções. O conjunto formado por funções constituem espaços vetoriais de dimensão infinita, assim surge a necessidade de estudar espaços de dimensão infinita de forma mais efetiva, posto que em Álgebra Linear, em geral, trata essencialmente de espaços vetoriais de dimensão finita, tendo em vista a associação matricial que há. Neste projeto obtive o primeiro contato com as ferramentas básicas e fundamentais da Análise Funcional presentes em referências bibliográficas tais como Botelho, Pellegrino e Teixeira (2011), Brézis, H. (2011), Cavalcanti, Cavalcanti, Homornik (2011), Kreyszig (1989) e Oliveira (2012).

As ferramentas apresentadas ao longo desse projeto foram de fundamental importância para, conhecer as propriedades dos espaços na qual são soluções de problemas obtidos via modelagem matemática, desenvolver habilidades mais abstratas, e, ainda, incentivar o desenvolvimento do aluno na sua carreira acadêmica, visto que a Análise Funcional é uma disciplina de grande importância nos programas de mestrado e doutorado.

METODOLOGIA

Foram apresentados seminários semanais à orientadora sobre tópicos clássicos relacionados à Análise Funcional, conforme descrito no plano de trabalho, exibindo os resultados obtidos e esclarecendo possíveis dúvidas. Inicialmente, foi solicitado a busca dos pré-requisitos necessários para que obtivesse a capacidade de compreender/assimilar o assunto abordado na bolsa, portanto o livro de Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler (1980) e o livro de Lima (1993), contribuíram grandemente para a obtenção dos recursos indispensáveis para o caminhar da bolsa e sempre que necessário utilizando-se os mesmos.

Com as leituras, foram vistos muitos teoremas, outrora citados, como: de Banach-Steinhaus, da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado, bem como o teorema de Baire que serviu como para o entendimento e demonstração de um dos teoremas já citadas. Ainda, foram estudados muitos outros teoremas de grande importância no ramo da análise funcional, como o teorema de Hahn-Banach na forma analítica e nas suas duas formas geométricas. Além disso, foram vistas e discutidas muitas definições a respeito de todos os conteúdos da bolsa, podendo citar os conteúdos finais, como a dualidade, espaços reflexivos e os espaços de Hilbert.

No decorrer desse um ano de projeto, foi possível observar a notoriedade da importância da análise funcional, bem como o quão enriquecedor de conhecimento é para o estudante estar convivendo diariamente com o estudo aplicado de tal tópico.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme descrito, revisando ou adquirindo conhecimentos novos, foi possível dar início ao acervo do projeto, a partir do livro de Botelho, Pellegrino e Teixeira (2011), no qual foram estudados vários tópicos, dentre eles destacando espaços vetoriais normados de dimensão infinita, como exemplo o espaço vetorial c_0, que denota o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, que concluímos com os estudos que é um espaço de Banach, no mesmo processo, estudamos o espaço vetorial c_00 que é subespaço de c_0, formado pelas sequências eventualmente nulas,

ISSN: 2447-6161

chegando à conclusão que o mesmo não é fechado em c_0, então não é um espaço de Banach, ainda, podemos citar o espaço vetorial de todas as sequências limitadas, que abrange o c_0, o l^{∞}, concluindo que é um espaço de Banach. Dessarte, podemos concluir que, para operador linear definido em espaço normado de dimensão finita a continuidade, decorre da sua linearidade, no entanto, para operador linear definido em espaço normado de dimensão infinita a atenção tem que ser maior, pois a continuidade não é obtida sabendo da linearidade do operador. De mesmo modo, alguns teoremas de extrema importância para análise funcional, como o teorema de Banach-Steinhaus, conhecido também como teorema da limitação uniforme, garante que uma família de operadores lineares contínuos é uniformemente limitada sempre que for pontualmente limitada. O teorema da Aplicação Aberta, afirma que dados E e F espaços de Banach e T uma aplicação de E em F linear, contínua e sobrejetora, então T é uma aplicação aberta e o teorema do Gráfico Fechado, permite que relacione continuidade de uma transformação linear com seu gráfico ser fechado, mais precisamente, sejam E e F espaços de Banach e T de E em F uma transformação linear, a mesma é contínua se, e somente se, o gráfico da transformação é fechado no cartesiano E x F.

Utilizando o livro de Cavalcanti, Cavalcanti e Komornik (2011), estudei o teorema de Hahn-Banach na forma analítica e em suas duas formas geométricas. O teorema de Hahn Banach em sua forma analítica é um resultado sobre extensões, de funcionais definidos em subespaços, a todo espaço vetorial, isto é, dado um espaço vetorial e um funcional positivamente homogêneo e subaditivo, definido no espaço, então dado um subespaço do espaço vetorial, vai existir um funcional linear que é prolongado por outro funcional, tal que para quaisquer elementos do espaço que aplicarmos será menor ou igual que o funcional positivamente homogêneo avaliado no mesmo elemento, ou seja, dada essas condições sempre vou poder mostrar que há esse prolongamento do funcional no espaço vetorial. Na sua forma geométrica, o Teorema de Hahn-Banach trata da separação de conjuntos convexos por hiperplanos. Na sua primeira forma geométrica consideramos E um espaço vetorial normal e A, B subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A é aberto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido lato. Na segunda forma geométrica sejam E um espaço vetorial normado, A e B subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A for fechado e B for compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito. Outro tópico estudado foi a dualidade na qual a característica relevante da descrição dos espaços duais é que os funcionais são descritos como objetos pertencentes à mesma classe dos elementos do espaço. A dualidade se faz importante pois muitos problemas podem ser resolvidos utilizando propriedades de espaços duais, como por exemplo, o teorema de Riesz, que nos afirma que um espaço de Hilbert H, é isometricamente isomorfo ao seu dual topológico. Ainda, foi estudado os espaços reflexivos, onde dado um espaço vetorial normado, é dito ser reflexivo se ele é isomorfo ao seu bidual. Por fim, estudei os espaços de Hilbert que são espaços com produto interno que são completos na norma induzida pelo produto interno. Dessa forma, pode-se concluir que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno. Neste contexto foram estudados alguns resultados.

CONCLUSÕES

Em resumo, a análise funcional é uma disciplina fundamental que fortalece a formação teórica e prática de um estudante de graduação, abrindo portas para uma ampla gama de aplicações e áreas de pesquisa. Contribuiu de forma significativa em minha formação visto que o incentivo do pensamento abstrato e o rigor da necessidade da pesquisa nos estudos fortaleceram e aprimoraram os conhecimentos anteriormente conquistados ou até mesmo trazidos com as necessidades encontradas em dados momentos no decorrer da bolsa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que me amou primeiro e que devo totalmente minha vida a Ele, ainda, à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira pelo financiamento da pesquisa intitulada Introdução à Análise Funcional, executada entre 01/10/2023 e 30/09/2024, por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic), da Unilab. Ademais, agradeço à professora doutora Amanda Angélica Feltrin Nunes pela confiança, paciência e orientação no decorrer do estudo.

REFERÊNCIAS

Boldrini, J. L.; Costa, S.I.R.; Figueiredo, V.L.; Wetzler, H.G. **Álgebra Linear.** São Paulo: UNICAMP, 3° edição, 1980.

Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. **Fundamentos de Análise Funcional**, [S. l.], [s. n.], 2011.

Brézis, H. **Functional Analysis**, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, LLC 2011.

Cavalcanti, M.M.; Cavalcanti, V. N. D.; Komornik, V. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá, Eduem, 2011.

Kreyszig, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley, New York, 1989.

Lima, Elon Lages. **Espaços Métricos.** Rio de Janeiro, 3° edição, 1993.

Oliveira, César R. **Introdução à Análise Funcional.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.