CAMPOS VETORIAIS DE KILLING SOBRE A ESFERA EUCLIDIANA

Luan Silva Nogueira[1]
João Francisco Da Silva Filho[2]

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo abordar os campos vetoriais de Killing (ou simplesmente, campos de Killing) definidos sobre a esfera Euclidiana. Nesse contexto, campos de Killing sobre uma variedade Riemanniana são campos de vetores com derivada de Lie identicamente nula, cuja nomenclatura homenageia o matemático alemão Whilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923). Vários exemplos de campos de Killing são amplamente discutidos na literatura, definidos em superfícies de revolução, variedades homogêneas, alguns produtos diretos e especialmente em formas espaciais, tais como o espaço Euclidiano, a esfera Euclidiana e o espaço hiperbólico. Esse tipo de campo de vetores representa um interessante caso particular de campos conformes, onde o fator conforme (ou fator de conformidade) é uma função identicamente nula. Deve-se ressaltar que a presença de campos de Killing em uma variedade Riemanniana possibilita obter informações sobre curvatura escalar, além de caracterizar as variedades Riemannianas completas que admitem certos tipos de campos de Killing. Nesse sentido, o estudo dos campos de Killing com foco na esfera Euclidiana, permite a construção de exemplos, assim como uma caracterização de tais campos de vetores, usando recursos mais elementares. Ademais, é importante destacar que esses campos de vetores estabelecem conexões interessantes com outras estruturas geométricas, tais como as curvas geodésicas e as isometrias locais.

Palavras-chave: Campos de Killing; espaço Euclidiano; esfera Euclidiana.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, luannogueira01234@gmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, joaofilho@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

Os campos de Killing referem-se a campos de vetores cuja a sua derivada de Lie da métrica Riemanniana em sua direção é identicamente nula. Por outro lado, pode-se afirmar que o espaço Euclidiano, a esfera Euclidiana e o espaço hiperbólico são variedades Riemannianas completas caracterizadas por terem curvatura seccional constante, o que as tornam exemplos de formas espaciais (cf. CARMO, 2005). Além disso, é conhecido que o recobrimento universal de qualquer forma espacial, com a métrica do recobrimento, é isométrico a uma dessas variedades mencionadas (cf. CARMO, 2005). Isso justifica a relevância dessas formas espaciais e a importância de estudá-las, especialmente a esfera Euclidiana, abordada no presente trabalho.

Os campos de Killing aparecem frequentemente no estudo de imersões em formas espaciais, nas superfícies de revolução, produtos diretos e variedades homogêneas. Esses campos vetoriais estão diretamente relacionados à curvatura escalar da variedade Riemanniana onde estão definidos (cf. TASHIRO, 1965; OBATA e YANO, 1970), bem como às curvas geodésicas (cf. PETERSEN, 1998), às isometrias locais (cf. Carmo, 2005) e às propriedades geométricas de variedades homogêneas (cf. O'NEILL 1983). Conforme estabelecido pelo Corolário 38 de O'Neill (1983), é possível garantir a existência de diversos campos de Killing na esfera Euclidiana, devido à sua homogeneidade.

Neste trabalho, tem-se como principal objetivo o estudo de campos de Killing definidos na esfera Euclidiana, adotando inicialmente uma abordagem mais elementar do que a comumente encontrada na literatura, e utilizando conceitos fundamentais de Álgebra Linear (BUENO, 2006 e LIMA, 2014), Cálculo Vetorial (GUIDORIZZI, 2002) e de Geometria Diferencial (TENENBLAT, 2006). Tendo em vista que a esfera Euclidiana é localmente conformemente euclidiana, o estudo dos campos de Killing na esfera Euclidiana pode ser significativamente simplificado por meio de uma mudança conforme de métrica, permitindo estabelecer uma interessante relação com os campos de Killing no espaço Euclidiano.

METODOLOGIA

Primeiramente, deve-se esclarecer que este trabalho irá abordar o estudo feito sobre campos de Killing na esfera Euclidiana, que remete a um dos Planos de Trabalho do Projeto de Pesquisa, intitulado como "Campos de Killing sobre formas espaciais". O objetivo principal desse trabalho será abordar a construção de exemplos de campos de Killing na esfera Euclidiana, bem como a caracterização de tais campos de vetores, utilizando conceitos mais elementares e estabelcendo relações com uma conhecida caracterização dos campos de Killing definidos no espaço Euclidiano.

No que diz respeito à metodologia adotada, o primeiro passo consistiu na aquisição dos pré-requisitos necessários, que envolveu o estudo de tópicos de Álgebra Linear, Cálculo Vetorial e alguns elementos fundamentais da Geometria Diferencial no contexto do espaço Euclidiano. Este estudo abrangeu conceitos essenciais, como gradiente, divergente, laplaciano, hessiano, curvatura escalar e derivada de Lie, cruciais para a análise das propriedades geométricas desse espaço e seus campos de Killing, que podem ser caracterizados por meio de matrizes antissimétricas (CARMO, 2005 e PETERSEN, 1998).

Na sequência, foi realizado um estudo sobre alguns conceitos de Geometria Diferencial sob a perspectiva da esfera Euclidiana, relacionando-os com os conceitos estudados no espaço Euclidiano. Deste modo, o estudo foi conduzido por meio de uma mudança conforme de métrica, o que é possível devido ao fato de a esfera Euclidiana ser localmente conformemente Euclidiana. Essa mudança conforme de métrica possibilitou o estudo dos campos de Killing na esfera Euclidiana, partindo dos campos de Killing no espaço Euclidiano sem

ISSN: 2447-6161

a necessidade de trabalhar diretamente com estruturas mais complexas.

Finalmente, realizou-se uma análise sobre os campos de Killing na esfera Euclidiana, com o objetivo de construir exemplos e/ou caracterizar tais campos de vetores. Nesse sentido, foi possível identificar uma relação significativa entre os campos de Killing no espaço Euclidiano e na esfera Euclidiana. Além disso, conduziu-se uma investigação específica sobre os campos de Killing gradientes na esfera Euclidiana, que culminou na conclusão da inexistência de campos de Killing gradientes não triviais na esfera Euclidiana.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o intuito de identificar e construir exemplos de campos de Killing definidos sobre a esfera Euclidiana, foi realizado um estudo que nos permitiu chegar a uma relação entre os campos de Killing no espaço Euclidiano e na esfera Euclidiana. Diante disso, foi possível constatar que todos os campos de Killing presentes na esfera Euclidiana podem ser obtidos a partir dos campos de Killing definidos no espaço Euclidiano, por meio de uma mudança conforme da métrica.

Ademais, foi conduzida uma análise sobre os campos de Killing gradientes definidos na esfera Euclidiana, que possibilitou verificar, de forma mais elementar do que frequentemente encontrado na literatura, que não existem campos de Killing gradientes não triviais sobre essa variedade Riemanniana. Esta constatação reitera um resultado amplamente conhecido para variedades compactas, indicando que a estrutura geométrica da esfera Euclidiana impõe limitações significativas à existência de campos de Killing gradientes.

CONCLUSÕES

A partir de uma abordagem mais elementar, fundamentada em conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra linear, Cálculo vetorial e Geometria Diferencial, foi possível desenvolver uma análise que permitiu estabelecer uma relação direta entre os campos de Killing definidos no espaço Euclidiano e na esfera Euclidiana. Essa abordagem revelou que todos os campos de Killing na esfera Euclidiana podem ser obtidos dos campos de Killing no espaço Euclidiano, por meio de uma mudança conforme de métrica. Além disso, a investigação sobre os campos de Killing gradientes revelou de maneira mais acessível que, de fato, não existem campos de Killing gradientes não triviais na esfera Euclidiana. Essas descobertas não apenas corroboram resultados já estabelecidos na literatura, mas também oferecem uma compreensão mais clara das interações entre a geometria da esfera Euclidiana e do espaço Euclidiano.

AGRADECIMENTOS

Expresso meus agradecimentos ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica (BICT) da FUNCAP pelo apoio financeiro concedido através de bolsas, e ao Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho pela oportunidade e orientações oferecidas ao longo do do projeto.

REFERÊNCIAS

BUENO, H. P. Álgebra Linear: Um Segundo Curso. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CARMO, M. P. do Geometria Riemanniana. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).

GUIDORIZZI, H. G. Um Curso de Cálculo - Volume 3. 5. ed. Rio de janeiro: LTC, 2002.

ISSN: 2447-6161

LIMA, E. L. Álgebra Linear. 8ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. Journal Differential Geometry, v. 4, p. 53-72, 1970.

O'NEILL, B. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, New York: Academic Press (1983).

PETERSEN, P. Riemannian Geometry. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate Texts in mathematics, v. 171.)

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. Transactions of the American Mathematical Society, v. 117, p. 251-275, 1965.

TENENBLAT, K. Introdução à Geometria Diferencial. 2. ed. rev. São Paulo: Blucher, 2008.

YANO, K. Integral formulas in Riemannian geometry. New York: Marcel Dekker, 1970.

ISSN: 2447-6161