CURVAS CONVEXAS DE LARGURA CONSTANTE

Egina Lima Martins[1]
Rafael Jorge Pontes Diogenes[2]

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar as curvas convexas em R^2 e alguns de seus principais resultados, de maneira particular as curvas de largura constante. O estudo aborda desde conceitos básicos como a definição matemática de uma curva, vetor tangente, vetor aceleração, curvatura e fórmulas de Frenet, Teorema fundamental das curvas, Evolutas e Involutas, até resultados interessantes sobre curvas convexas e suas aplicações. Para uma melhor visualização, utilizou-se do Geogebra para descrever as curvas, os resultados e generalizações permitindo a ampliação da intuição matemática dos conceitos e resultados geométricos. Os resultados encontrados destacam a importância de ter conhecimento sobre os conceitos básicos de curvas planas no R^2 para a compreensão das curvas convexas de largura constante. Além disso, permitiu a compreensão das curvas de Agnasi, hipocicloides, rosácea, leminiscata de bernoulli, lemniscata de gerono das generalizações hipocicloide e epiciclóide e suas respectivos casos particulares da astroide, cardióides e limaçon. Na análise de curvas localmente convexas compreende-se uma classe de curvas caracterizadas por possuir uma largura que independe da direção e para realizar esse estudo é necessário a compreensão de alguns conceitos como diâmetro, largura e ponto de antípoda.

Palavras-chave: Curvas; Curvas planas; Curvas convexas; Curvas de largura constante.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN, Discente, emlima@aluno.unilab.edu.br[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

Uma curva em R^2, é intuitivamente, um subconjunto de R^2 que tem dimensão um, como por exemplo gráfico de funções de uma variável real, ou de maneira mais simplista, uma figura "desenhada" com um único traço, sem tirar o lápis/caneta do papel. De maneira formal, é uma deformação contínua de um intervalo real no plano. Podemos ver ainda como "a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano" (Alencar, Santos e Silva Neto, 2020). Esta última é a maneira mais adequada de definir curvas, pois justifica muito bem conceitos como sentido da trajetória, vetor velocidade, vetor aceleração etc.

A Geometria de curvas (em R^2 e R^3) é o início do estudo em Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, que basicamente introduz o leitor ao universo da Geometria Diferencial. Com isso, o estudo de curvas traz para o aluno uma porta de entrada para a pesquisa científica. Assim, a Geometria de Curvas em R^2 é um dos assuntos mais encantadores em Geometria, sendo elementar e avançado. Como bem menciona Marcelo Viana, Diretor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, "É difícil pensar em um tema mais adequado para aguçar a intuição matemática do leitor"(Alencar, Santos e Silva Neto, 2020, p.xiii).

De maneira objetiva, o trabalho se propõe a estudar as curvas em R^2 que são ditas convexas, mais precisamente, é uma curva $\alpha:I\to R^2$ é dita convexa se a reta tangente em cada ponto deixa o traço da curva completamente em um dos lados que a reta determina. Além disso, podemos definir a noção de convexidade local, isto é, uma curva $\alpha:I\to R^2$ é localmente convexa em $t_0\in I$ se ela for convexa em uma vizinhança aberta de t_0. Por fim, uma curva $\alpha:I\to R^2$ é dita estritamente convexa em t_0, se α for convexa em t_0 e existir uma vizinhança de t_0 na qual $\alpha(t_0)$ é o único ponto do traço (restrito à vizinhança) que pertence a reta tangente.

As curvas convexas são importantes no estudo das curvas, pois são uma classe de curvas que detém propriedades fortes e com isso muitos são os resultados para curvas convexas. Por exemplo:

- uma curva fechada e convexa parametrizada pelo comprimento de arco é uma curva simples (sem auto interseções);
- se a curvatura de uma curva regular é não nula, então a curva é estritamente convexa neste ponto.

Outro resultado muito interessante é uma caracterização global das curvas convexas pela curvatura: uma curva regular, fechada e simples é convexa se e somente se sua curvatura não mudar de sinal.

Os resultados expressos acima são apenas alguns de muitos. Este trabalho consiste no estudo das curvas convexas sob a perspectiva das curvas de largura constante. Para uma curva fechada, segundo Araújo (2008) "A largura numa dada direção é a largura mínima entre faixas que contêm a curva e que são limitadas por retas ortogonais a essa direção." Sendo assim, a largura de uma curva não é, em geral, a mesma em todas as direções. Uma circunferência tem a mesma largura em todas as direções. Já uma elipse não possui essa propriedade, por exemplo.

Dizemos que uma curva tem largura constante se ela for fechada e a largura em todas as direções for a mesma. Evidentemente a circunferência tem largura constante. Porém existem outras curvas que possuem largura constante como, por exemplo, o triângulo de Reuleaux que é a curva obtida a partir de um triângulo equilátero unindo os três arcos de círculos com centro em cada vértice e ligando os outros dois vértices. Vale ressaltar que o triângulo de Reuleaux é apenas contínuo, deixando de ser diferenciável exatamente nos vértices do triângulo.

Um resultado bastante interessante é que toda curva regular, fechada e de largura constante é estritamente convexa. Outro teorema bastante conhecido nessa temática de curvas de largura constante é o Teorema de Barbier que diz: O comprimento de qualquer curva convexa, regular, fechada, simples e de largura constante L é igual a πL. Esses resultados mostram o quanto as curvas convexas possuem propriedades fortes.

Com base em tudo que foi discutido acima, o principal objetivo deste trabalho consiste em estudar as curvas convexas em R^2, de maneira particular as curvas diferenciáveis. Nesse sentido, os objetivos específicos são estudar os conceitos básicos sobre curvas em R^2: parametrização, curvatura e fórmulas de Frenet, Teorema Fundamental das curvas, Forma canônica e Evolutas e Involutas; E especificamente as curvas regulares convexas e seus vários resultados na perspectiva das curvas de largura constante. Além destes objetivos específicos, sempre que possível é usado o Geogebra para visualizar os resultados e as curvas e quanto possível criar Appets, que são modelos de arquivos, para os resultados.

METODOLOGIA

Esta pesquisa realizou o estudo de conceitos básicos de curvas em R^2: parametrização, curvatura e fórmulas de Frenet, Teorema Fundamental das curvas, Forma canônica e Evolutas e Involutas, e em particular das curvas regulares convexas e seus vários resultados na perspectiva das curvas de largura constante utilizando o livro "Geometria diferencial de curvas no R^2" dos autores Alencar, Santos e Silva Neto (2020). Semanalmente realizou-se o estudo das seções do livro e reuniões com o orientador a fim de sanar dúvidas sobre os conteúdos.

Dentro da perspectiva de estudo das seções utilizou-se o geogebra para visualizar os resultados, as curvas particulares e as generalizações. Além disso, realizou-se a resolução de exercícios das obras (ALENCAR, SANTOS, SILVA NETO, 2020) e (TENENBLAT, 2008) para a fixação dos conteúdos, identificação de lacunas do conhecimento e aprofundamento.

Contou ainda com pesquisas complementares sobre sistemas de coordenadas polares, campo de vetores tangentes e normais, curvatura e equações de Frenet, parametrização pelo comprimento de arco, plano complexo e Teorema fundamental das curvas planas, curvas particulares e aplicações.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste estudo, investigamos curvas convexas no R^2, mais especificamente os conceitos básicos e as curvas de largura constante. Inicialmente estudamos os conceitos básicos de parametrização, curvatura e fórmula de Frenet, Teorema fundamental das curvas, Forma canônica, evolutas e involutas.

Os estudos mostraram que a compreensão de curvas advém da noção intuitiva de "figuras "desenhadas" com um único traço sem tirar o lápis do papel" (ALENCAR, SANTOS, SILVA NETO, 2020) e que notamos quando usamos o geogebra para criar o traço da curva a partir de seu conjunto imagem. Observou-se que em geral, o estudo de curvas necessita de algumas noções que caracterizam seu comportamento, como é o caso dos conceitos de curvas contínuas, fechadas, periódicas e simples.

ISSN: 2447-6161

Uma classe de curvas com inúmeras aplicações e que estudamos são as curvas de Jordan que se definem como curvas simples e fechadas. Exemplos importantes são a elipse, círculo e triângulo de Reuleaux.

Além disso, o estudo necessita de análises adicionais como sistemas de coordenadas polares, campo de vetores tangentes e normais, curvatura e equações de Frenet, parametrização pelo comprimento de arco, plano complexo e Teorema fundamental das curvas planas.

Posteriormente os estudos trouxeram uma compreensão sobre curvas convexas de largura constante. Para essa investigação o ponto de partida foi a compreensão acerca das curvas convexas, definidas como curvas simples que são localmente convexas em todos os seus pontos. Esse conceito refere-se a uma curva regular onde, em torno de cada ponto t_0, existe um pequeno intervalo aberto no qual a curva está inteiramente de um lado da reta tangente à curva em t_0. Ao aprofundar esse estudo, descobriu-se vários resultados que relacionam a curvatura à análise da convexidade de uma curva. Um caso especial de curvas convexas que merece destaque são as curvas de Jordan, que delimitam uma região específica a qual é possível estudar sua convexidade considerando-a como um conjunto.

Na análise de curvas localmente convexas compreende-se uma classe de curvas caracterizadas por possuir uma largura que independe da direção e para realizar esse estudo é necessário a compreensão de alguns conceitos como diâmetro, largura e ponto de antípoda. Destaca-se ainda um resultado importante que é o Teorema de Barbier que permite calcular o comprimento de algumas curvas de largura constante. Deve-se destacar ainda que os principais exemplos de curvas de largura constante são o círculo e o triângulo de Reuleaux cuja construção é simples, no entanto existem curvas de largura constantes cuja construção é bem complexa.

Durante todo o estudo foi utilizado o geogebra como recurso para visualizar o comportamento das curvas em particular das curvas paramétricas, fechadas, regulares, convexas e de largura constante bem como os conceitos de curvatura, vetores tangente e vetores normais. Dentre todas essas observações, as que ganharam maiores destaques foram as curvas de Jordan e a construção de algumas curvas convexas de largura constante. Além desse recurso vale destacar que durante cada estudo realizou-se a resolução de exercícios das obras (ALENCAR, SANTOS, SILVA NETO, 2020) e (TENENBLAT, 2008) como forma de fixar os conceitos estudados.

Em resumo, os resultados destacam a importância de ter conhecimento sobre os conceitos básicos de curvas planas no R^2 para a compreensão das curvas convexas de largura constante, mas também permite a utilização do geogebra como forma de visualizar casos particulares e realizar generalizações das curvas. Além disso, permitiu a compreensão das curvas de Agnasi, hipocicloides, rosácea, leminiscata de bernoulli, lemniscata de gerono das generalizações hipocicloide e epiciclóide e suas respectivos casos particulares da astroide, cardióides e limaçon.

CONCLUSÕES

Conclui-se que os objetivos deste estudo foram plenamente alcançados através da análise dos conceitos fundamentais de curvas no R^2, como parametrização, curvatura, a forma de Frenet, o Teorema Fundamental das Curvas, forma canônica, bem como as noções de evolutas e involutas.

Esses conceitos proporcionaram uma compreensão aprofundada das curvas convexas e, especificamente, das curvas com largura constante. Além disso, o uso do GeoGebra permitiu a visualização prática de casos particulares e a exploração de generalizações, enriquecendo a compreensão teórica com exemplos concretos.

AGRADECIMENTOS

Inicio meus agradecimentos expressando minha gratidão ao meu orientador Rafael Pontes Diógenes pela oportunidade de realizar essa pesquisa e por suas paciência e incentivo durante todo o processo. Suas críticas e sugestões foram fundamentais para o desenvolvimento dessa pesquisa.

Agradeço igualmente a FUNCAP cujo o apoio financeiro foi fundamental para a realização deste trabalho uma vez que permitiu a dedicação integral às pesquisas e ao acesso de recursos essenciais como material bibliográfico e recursos tecnológicos. Sem esse suporte a conclusão não teria sido possível com o mesmo nível de profundidade e qualidade.

Por fim, dedico este trabalho a minha família que sempre me apoiou e acreditou no meu potencial proporcionando-me o apoio necessário em todos os momentos.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, H. SANTOS, W. SILVA NETO, G. Geometria diferencial de curvas no ▯ . Rio de Janeiro: SBM, 2020.

ARAÚJO, P. Geometria diferencial. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

TENEBLAT. K. Introdução à geometria diferencial. São Paulo: Blucher, 2008.

ISSN: 2447-6161