O TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES PARA CURVAS CONVEXAS

Nalison Silva[1]
Rafael Diógenes [2]

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar o Teorema dos Quatro Vértices para curvas convexas, um tema fundamental na Geometria Diferencial. O teorema estabelece que toda curva regular, fechada e simples possui pelo menos quatro vértices, que são pontos onde a curvatura da curva atinge máximos ou mínimos locais. Uma pesquisa foi realizada por meio de uma abordagem teórica, complementada pelo uso de ferramentas de visualização, como o GeoGebra, que facilitaram a compreensão das propriedades geométricas e o comportamento das curvas complexas. A importância do estudo das curvas convexas reside tanto em suas propriedades geométricas robustas quanto em suas aplicações práticas, especialmente em problemas de otimização e modelagem geométrica. Além disso, as curvas convexas apresentam recursos que simplificam a análise de sua curvatura, o que torna o Teorema dos Quatro Vértices mais acessível e compreensível. Os principais resultados demonstraram que a convexidade das curvas é crucial para a aplicação do teorema, e a análise visual proporcionou uma validação teórica do conceito.

Palavras-chave: Teorema dos Quatro Vértices; curvas convexas; Geometria Diferencial; Geogebra.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB, Unidade Acadêmica dos Palmares , Discente, nalisonmartins@aluno.unilab.edu.br[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB, Unidade Acadêmica dos Palmares , Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como foco o Teorema dos Quatro Vértices para curvas convexas, um tema de relevância fundamental na Geometria Diferencial. O teorema afirma que toda curva regular, fechada e simples possui pelo menos quatro vértices, que são pontos onde a curvatura da curva atinge máximos ou mínimos locais (Alencar, Santos e Silva Neto, 2020). Essa característica é essencial para a compreensão das propriedades geométricas das curvas e suas aplicações em diversas áreas da matemática.

A importância do estudo das curvas convexas reside em suas propriedades robustas e suas implicações práticas em problemas de otimização e modelagem geométrica. As curvas convexas são definidas como aquelas em que a reta tangente em cada ponto deixa o traço da curva em um único lado, o que simplifica a análise de sua curvatura e das relações entre seus pontos. Como mostrado por Mukhopadhyaya em 1909 e posteriormente generalizado por Kneser em 1912, uma curva convexa fechada sempre apresenta pelo menos quatro vértices, pontos onde a curvatura atinge máximos ou mínimos locais (Andrade, 2011).

O principal objetivo deste trabalho é estudar as curvas convexas em R^2, de maneira particular as curvas diferenciáveis. Nesse sentido, os objetivos específicos são estudar os conceitos básicos sobre curvas em R^2: parametrização, curvatura e fórmulas de Frenet, Teorema Fundamental das curvas, Forma canônica e Evolutas e Involutas; E especificamente as curvas regulares convexas e seus vários resultados, seja de equivalência seja de “aplicação” em outros temas relevantes tais como curvas de largura constante e o Teorema dos quatro vértices. Além destes objetivos específicos, utilizou-se sempre que possível usar o Geogebra para visualizar os resultados e as curvas.

Este estudo é fundamentado na literatura existente sobre Geometria Diferencial, permitindo um aprofundamento na análise das condições sob as quais o teorema é aplicado e contribuindo para uma compreensão mais clara das curvas convexas e suas propriedades. Em particular, o Teorema dos Quatro Vértices, que possui uma longa história e diferentes provas, como descrito por Carneiro e Garcia (2019), é de grande relevância para o estudo de curvas diferenciáveis em R^2 especialmente no contexto de curvas convexas (CARNEIRO; GARCIA, 2019).

METODOLOGIA

A metodologia empregada durante o trabalho envolveu tanto uma abordagem teórica que ocorreu através do estudo de um ebook com seminários e retiradas de dúvidas com o orientador, quanto uma análise prática utilizando ferramentas de geometria dinâmica, em particular o Geogebra. O estudo foi dividido em duas fases principais, cada uma com objetivos específicos e complementares.

Na primeira fase, é realizada uma revisão aprofundada dos conceitos fundamentais da geometria diferencial, com foco nas curvas regulares. Foram estudados conceitos como os vetores tangentes e normais em curvas, além das equações de Frenet, que descrevem a relação entre os vetores e a curvatura da curva. Essa base teórica foi essencial para desenvolver a compreensão necessária sobre as propriedades geométricas das curvas e preparar o caminho para as investigações mais avançadas.

Na segunda fase, o foco passou a ser o estudo das curvas convexas como parte da preparação para o trabalho relacionado ao Teorema dos Quatro Vértices. Nessa etapa é explorado as características geométricas das curvas convexas, que são definidas pela propriedade de que, em qualquer ponto da curva, existe uma

ISSN: 2447-6161

vizinhança onde a curva permanece de um único lado da reta tangente.

A convexidade é um aspecto central do teorema, pois simplifica a demonstração, tornando-a mais acessível e intuitiva. Durante essas duas principais fases, é utilizado o software GeoGebra como ferramenta de suporte para modelar e visualizar as curvas convexas sob análise. O GeoGebra foi essencial para verificar visualmente os vértices nas curvas convexas e para explorar como as propriedades da curva influenciam a distribuição dos pontos de curvatura extrema. Essa combinação de fundamentação teórica e análise prática permite explorar a relação entre convexidade e vértices de maneira eficaz, preparando o caminho para a compreensão mais profunda do Teorema dos Quatro Vértices.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

No início da pesquisa, o foco é construir uma base sólida para compreender os princípios fundamentais da geometria diferencial de curvas. Esse processo começou com o estudo das curvas contínuas no plano $\mathbb{R}^2$, oferecendo as primeiras noções sobre elementos como vetores tangentes e normais. Essa base foi fundamental para avançar em direção a um entendimento mais profundo das propriedades geométricas das curvas suaves.

A introdução do conceito de curvatura e das equações de Frenet marcou um ponto importante no desenvolvimento do trabalho, pois permitiu que a análise do comportamento local das curvas de maneira mais precisa. O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas consolidou o entendimento das formas canônicas locais, das curvas paralelas, evolutas e involutas. Esse teorema estabelece que, dada uma função contínua de curvatura, uma posição inicial e uma direção inicial, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco que satisfaz essas condições. A equação da curva é expressa por integrais envolvendo a curvatura, e o ângulo inicial define a orientação da curva (Alencar, Santos e Silva Neto, 2020). Essa construção única foi essencial para a compreensão das propriedades geométricas das curvas, e nos permitiu visualizar dinamicamente, por meio do GeoGebra, como essas formas evoluem. Assim, o estudo desse teorema preparou o terreno para investigações mais específicas sobre as curvas convexas, que viriam a ser o foco principal da pesquisa na etapa seguinte. Além disso, o uso contínuo do GeoGebra se mostrou uma ferramenta valiosa para a visualização dos conceitos teóricos ao longo de toda essa fase.

O estudo das curvas regulares diferenciáveis revelou uma variedade de propriedades que expandiram nosso entendimento, como a identificação de pontos de inflexão e mudanças na direção tangencial, fornecendo uma visão mais rica sobre o comportamento das curvas.

Com essa base estabelecida, passou-se à parte central da pesquisa: investigar sob quais condições “A curva regular fechada simples convexa tem ao menos quatro vértices” (ANDRADE, 2011, p. 30) conforme previsto pelo Teorema dos Quatro Vértices. A definição de vértice como um ponto de máximo ou mínimo local da curvatura é o guia durante essa etapa, assim como o estudo detalhado das curvas convexas e das equações de Frenet, que descrevem as relações entre os vetores tangente, normal e a curvatura da curva (Alencar, Santos e Silva Neto, 2020).

Ao investigar curvas convexas, fica claro que essas curvas possuem uma característica importante: para cada ponto da curva, existe uma vizinhança em que a curva se mantém de um único lado da reta tangente, uma

ISSN: 2447-6161

condição essencial para sua convexidade. De maneira particular, uma curva regular, fechada e simples é convexa se, e somente se, sua função curvatura não muda de sinal (Alencar, Santos e Silva Neto, 2020). A relação entre as curvas evolutas e os vértices se destacou, pois a evoluta está diretamente ligada aos pontos de máximos e mínimos da curvatura — ou seja, aos vértices. Com isso, chega-se ao principal teorema do plano de trabalho que é o Teorema dos quatros vértices para curvas convexas que diz: uma curva regular, fechada, simples, convexa e de classe C^3, possui pelo menos quatro vértices.

Embora o foco principal tenha sido em curvas convexas, é interessante destacar um resultado complementar: existe um teorema (de Osserman) que afirma que uma curva regular, fechada e simples, sob condições apropriadas, também possui pelo menos quatro vértices, mesmo que a curva não seja convexa (Alencar, Santos e Silva Neto, 2020). O fato de remover a condição de convexidade torna a demonstração muito mais complexa, envolvendo elementos avançados da geometria. Embora esse resultado não seja o foco desta pesquisa, ele se mostrou relevante no estudo da generalização das propriedades dos vértices. Encontramos, neste teorema, a curva limaçon, que cumpre basicamente todos os requisitos do Teorema dos Quatro Vértices, porém não é convexa, encaixando-se assim nas condições do Teorema dos Quatro Vértices demonstrada por Osserman.

Ao longo do processo, ficou evidente que a combinação da geometria diferencial com recursos computacionais enriquece a análise, proporcionando uma compreensão mais intuitiva e visual de propriedades matemáticas complexas. O estudo não apenas reforçou a importância do Teorema dos Quatro Vértices no contexto das curvas convexas, mas também demonstrou como a geometria, quando aliada a ferramentas interativas, pode trazer à tona nuances e detalhes sobre a natureza intrínseca das curvas que não seriam facilmente percebidos apenas pela análise teórica.

Por fim, o uso de softwares como o GeoGebra facilita a comunicação dos resultados, oferecendo uma forma de visualizar conceitos abstratos e compartilhá-los de maneira mais clara, pois nos permitiu visualizar de maneira interativa e dinâmica as curvas convexas, identificando com precisão os pontos de curvatura extrema e validando os resultados teóricos. Observamos que, em curvas convexas, a presença de vértices está diretamente conectada ao comportamento da curvatura, confirmando as expectativas teóricas do Teorema dos Quatro Vértices. Ao final, o trabalho destacou como a tecnologia pode ser um grande aliado no estudo da matemática, promovendo tanto uma compreensão mais profunda quanto uma visualização direta dos fenômenos geométricos que envolvem as curvas convexas e suas propriedades.

CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho, foi possível explorar e aprofundar o conhecimento sobre curvas convexas e a aplicação do Teorema dos Quatro Vértices, utilizando uma abordagem teórica combinada com ferramentas práticas como o GeoGebra.

As fases do estudo, desde a revisão teórica até a aplicação do teorema em curvas convexas, mostraram que o Teorema dos Quatro Vértices não apenas tem implicações matemáticas profundas, mas também oferece um campo fértil para investigações visuais e dinâmicas. O uso do GeoGebra foi especialmente relevante, permitindo validar e visualizar os resultados obtidos de maneira interativa, o que facilitou a análise e a comunicação dos conceitos teóricos.

Apesar das dificuldades encontradas, como a identificação de curvas convexas adequadas e a verificação rigorosa da convexidade, o estudo alcançou seus objetivos ao fornecer uma análise clara e detalhada da relação entre as propriedades geométricas das curvas e seus vértices. O trabalho também destacou a importância do uso de ferramentas computacionais no estudo da geometria diferencial, mostrando como a tecnologia pode enriquecer a compreensão e a aplicação de conceitos complexos.

Por fim, o aprendizado gerado durante essa pesquisa, tanto em termos teóricos quanto práticos, reforça a relevância da geometria diferencial e abre portas para futuros estudos, tanto sobre o Teorema dos Quatro Vértices quanto sobre suas extensões em curvas não convexas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab) pelo suporte financeiro através da bolsa de ações afirmativas, que possibilitou a realização deste projeto.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, H. SANTOS, W. SILVA NETO, G. Geometria diferencial de curvas no R^2, Rio de Janeiro: SBM, 2020.

ANDRADE, M. Índice de rotação e o Teorema dos Quatros Vértices. Monografia de Especialização para professores. Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.

CARNEIRO, M. GARCIA, R. O Teorema dos Quatro Vértices e sua Recíproca. 32º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

DIÓGENES, R. Geometria diferencial de curvas planas com Geogebra. Professor de Matemática Online, v. 7, n. 2, p. 226-233, 2019.

EVES, H. Introdução à História da matemática. Campinas: UNICAMP, 2014.