



CLASSIFICAÇÃO DAS SINGULARIDADES EM FUNÇÕES COM CODIMENSÃO MENOR OU IGUAL A CINCO

Matheus Maia Da Silva¹
Joserlan Perote Da Silva²

RESUMO

A Teoria de Singularidades de aplicações diferenciais é uma extensão de vasto alcance do estudo de funções em pontos de máximo e mínimo vistos na disciplina de cálculo diferencial e integral. Neste caso as funções são substituídas por famílias de funções. O estudo da teoria de singularidades de aplicações diferenciáveis motiva a busca por novos conhecimentos, no intuito de obter os devidos pré-requisitos e utilizar os conhecimentos Matemáticos, já adquiridos em sala de aula nas disciplinas cursadas, tais como: Cálculo Diferencial I, II e III. A partir do teorema do posto constante, onde são estudadas as aplicações definidas em abertos que tem diferentes tipos de pontos críticos, passamos a estudar a questão mais natural que é determinar uma forma normal (local) descrevendo cada tipo de singularidade da aplicação. Neste projeto estudamos as formas normais das singularidades das funções reais e também das aplicações do plano no plano. No caso das funções reais descrevemos as singularidades em funções com codimensão menor ou igual a cinco, tendo por base os resultados de Arnol'd em [11] e de Thom descrito em [14]. A descrição das aplicações do plano no plano foi feita com base nos trabalhos de Whitney [17] e Rieger [19].

Palavras-chave: Singularidades; Classificação; Codimensão.

Universidade da Integração da Lusofonia Afro Brasileira , Licenciatura em Matemática , Discente,
silvamatheus@aluno.unilab.edu.br¹

Universidade da Integração da Lusofonia Afro Brasileira , Licenciatura em matemática , Docente, joserlanperote@unilab.edu.br²

INTRODUÇÃO

Este trabalho se desenvolve dando sequência aos estudos vistos na disciplina de cálculo diferencial e Análise Real. Em uma função da reta na reta, se tivermos uma curva suave com derivada zero em um ponto, dizemos que esse ponto é crítico, e dessa forma, nesse ponto a função atinge seu valor máximo, mínimo ou muda o sentido da concavidade o que chamamos de ponto de inflexão. Posteriormente no \mathbb{R}^3 , se tivermos um ponto na qual as derivadas parciais são zero em um ponto, temos que a função atinge seu valor máximo, mínimo ou sela nesse ponto. É nesse contexto que se encontra esse trabalho, estaremos interessados nesses pontos e iremos generalizar o conceito de função para famílias de funções equivalentes o que chamaremos de Germe de funções e estaremos interessados em classificar essas Germes.

METODOLOGIA

A natureza do projeto é de estudo bibliográfico, desta forma, no início da pesquisa foi solicitado que eu, como bolsista, buscasse os pré-requisitos essenciais para compreender o assunto a ser abordado. Para isso, realizei uma revisão bibliográfica dos conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Análise na Reta. Além disso, estudei livros que forneceram os fundamentos necessários para compreender a Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis, dando assim um embasamento sólido para iniciar o estudo do conteúdo principal. Após adquirir esses pré requisitos, comecei a me aprofundar no tema da bolsa, por meio da leitura de artigos indicados pelo orientador, isso permitiu que eu me familiarizasse com a teoria de Singularidades e suas aplicações, dando os primeiros passos no estudo do tema do projeto e compreendendo sua importância e discussões. Durante o desenvolvimento da pesquisa, o orientador também sugeriu o estudo de materiais que me introduziram ao LaTeX e editores desse formato. Essa etapa foi fundamental para aprender a produzir textos mais adequados à escrita científica, preparando-me para a produção de trabalhos acadêmicos. Além disso, tivemos encontros semanais com o orientador, nos quais discutimos e esclarecemos dúvidas sobre os conteúdos estudados, bem como acompanhamos as atividades propostas. Esses encontros foram essenciais para o andamento do projeto e para meu desenvolvimento acadêmico.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Obtemos as classes de equivalência de uma aplicação de classe C^∞ definida em aberto \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n por meio de uma mudança de coordenadas locais, que são difeomorfismos locais, no domínio e contradomínio. Estudamos o espaço vetorial real das aplicações polinomiais g em \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^p de grau menor ou igual a k com $g(0)=0$, chamamos de espaço dos k -jatos. Estudamos a classe de todas as aplicações que são iguais a f em U de germe na origem em U , sendo f a aplicação e U um aberto onde 0 pertence a U . Sendo o germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, conseguimos obter uma lista parcial das classes de equivalência que são determinadas a menos de mudança de coordenadas em \mathbb{R}^n com dois germes f e g \mathbb{R} equivalentes quando existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $f = g \circ h$. Classificamos as singularidades isoladas e codimensão finita. Estudamos a R equivalência entre os germes de funções complexas, classificamos os germes com coposto um e codimensão k , classificamos os germes de codimensão um e zero. Estudamos o primeiro e o segundo teorema de classificação de germes de R . Thom. Estudamos a A -equivalência de germes do plano no

plano. Estudamos os germes com 2-jato (x, xy) e 2-jato $(x, 0)$. Estudamos as órbitas de A-codimensão menor ou igual a 2 e germes com 2-jato (x, xy) e também estudamos as órbitas com 2-jato $(x, 0)$ em $J^3(2, 2)$. Os teoremas de R. Thom são: Para um germe $f \in m_n^2$ de posto 1 e codimensão ≤ 5 , a menos de uma soma de uma forma quadrática não degenerada em $n-1$ variáveis, f é equivalente a um dos seguintes germes:

- (i) x^3 , se $\text{cod } f = 2$, dobra,
- (ii) x^4 , se $\text{cod } f = 3$, cúspide,
- (iii) x^5 , se $\text{cod } f = 4$, rabo de andorinha,
- (iv) x^6 , se $\text{cod } f = 5$, borboleta.

E o segundo teorema é que todo germe $f \in m_n^2$ de posto 2 e codimensão ≤ 5 é equivalente, a menos da soma de uma forma quadrática não degenerada em $n - 2$ variáveis, a um dos seguintes germes:

1. $x^3 - xy^2$ (umbílico elíptico),
2. $x^3 + y^3$ (umbílico hiperbólico) ou
3. $x^2y + y^4$ (umbílico parabólico).

CONCLUSÕES

A pesquisa realizada alcançou com sucesso o objetivo principal de estudar as singularidades, me proporcionando uma base sólida para o aprofundamento futuro no tema. A abordagem metódica e a análise detalhada do estudo da Teoria das singularidades me permitiu desenvolver uma compreensão abrangente e crítica do assunto, estabelecendo um pré-requisito essencial para estudos avançados. Além disso, a experiência oferecida pelo projeto me possibilitou uma imersão prática no campo da pesquisa, enriquecida por discussões contínuas com o orientador. Essas interações não só facilitaram o aprendizado e a aplicação de conceitos teóricos, mas também contribuíram para o meu crescimento acadêmico, me preparando para desafios futuros e promovendo um desenvolvimento mais robusto como estudante e pesquisador.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, porque, sem ele nada posso fazer e tudo o que tenho é graças a sua misericórdia. Agradeço ao professor-orientador Joserlan Perote pela oportunidade, e confiança que me foi depositada. Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da pesquisa intitulada classificação das singularidades em funções com codimensão menor ou igual a cinco e executada entre 01/09/2023 e 31/08/2024, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e tecnológica (Pibiti) da Unilab, isso faz com que, possamos nos dedicar melhor ao curso enquanto podemos estudar conteúdos que vão além das fronteiras da graduação. Agradeço a Unilab por ser a universidade em que curso minha graduação e por isso pude ter a oportunidade de conhecer



pessoas incríveis e fazer parte desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo - Volume 1, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
- GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo - Volume 2, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
- GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo - Volume 3, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
- APOSTOL, Tom M. Cálculo. Rio de Janeiro: Editora Reverté, 1979.
- LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- Tenenblat, Keti; Introdução à Geometria Diferencial; Editora Universidade de Brasília; 1988.
- CARMO, Manfredo Perdigão. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática- SBM, 2005.
- Saunders, P.T.; An Introduction to Catastrophe Theory; Cambridge University Press; 1980.
- EBELING, Wolfgang. Functions of several complex variables and their singularities. Tradução de Philip Spain. Providence: American Mathematical Society, 1992. Tradução de: Funktionentheorie, differential topologie and singularitäten.
- V.I. Arnol'd, A. Varchenko & S. Gusein-Zade, Singularities of differentiable maps. Vol. I, Monographs in Mathematics, 82, Birkhäuser, 1985.
- Bruce, J. W; Giblin, P. J. Curves and Singularities, second edition, Cambridge University Press, 1992.
- Gibson, C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Pitman, 1979.
- R. Thom, Stabilité structurelle et morphogénèse. (French) Essai d'une théorie générale des modèles, Mathematical Physics Monograph Series. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1972. 362 pp.
- C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map germs, Bull. London Math. Soc. 13, (1981), 481-539.
- MILNOR, John. Singular points of complex hypersurfaces. Princeton: Princeton University



Press, 1968.

H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. *Ann. of Math. (2)* 62 (1955), 374–410.

DIMCA, Alexandru. *Singularities and topology of hypersurfaces*. New York: Springer-Verlag, 1992.

J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, *J. London Math. Soc. (2)*, 36, (1987), 351–369.

