CLASSIFICAÇÃO DAS SINGULARIDADES EM FUNÇÕES COM CODIMENSÃO MENOR OU IGUAL A CINCO

Matheus Maia Da Silva[1]
Joserlan Perote Da Silva [2]

RESUMO

A Teoria de Singularidades de aplicações diferenciais é uma extensão de vasto alcance do estudo de funções em pontos de máximo e mínimo vistos na disciplina de cálculo diferencial e integral. Neste caso as funções são substituídas por famílias de funções. O estudo da teoria de singularidades de aplicações diferenciáveis motiva a busca por novos conhecimentos, no intuito de obter os devidos pré-requisitos e utilizar os conhecimentos Matemáticos, já adquiridos em sala de aula nas disciplinas cursadas, tais como: Cálculo Diferencial I, II e III. A partir do teorema do posto constante, onde são estudadas as aplicações definidas em abertos que tem diferentes tipos de pontos críticos, passamos a estudar a questão mais natural que é determinar uma forma normal (local) descrevendo cada tipo de singularidade da aplicação. Neste projeto estudamos as formas normais das singularidades das funções reais e também das aplicações do plano no plano. No caso das funções reais descrevemos as singularidades em funções com codimensão menor ou igual a cinco, tendo por base os resultados de Arnol'd em [11] e de Thom descrito em [14]. A descrição das aplicações do plano no plano foi feita com base nos trabalhos de Whitney [17] e Rieger [19].

Palavras-chave: Singularidades; Classificação; Codimensão.

Universidade da Integração da Lusofonia Afro Brasileira , Licenciatura em Matemática , Discente, silvamatheus@aluno.unilab.edu.br[1]
Universidade da Integração da Lusofonia Afro Brasileira , Licenciatura em matemática , Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

Este trabalho se desenvolve dando sequência aos estudos vistos na disciplina de cálculo diferencial e Análise Real. Em uma função da reta na reta, se tivermos uma curva suave com derivada zero em um ponto, dizemos que esse ponto é crítico, e dessa forma, nesse ponto a função atinge seu valor máximo, mínimo ou muda o sentido da concavidade o que chamamos de ponto de inflexão. Posteriormente no R^3, se tivermos um ponto na qual as derivadas parciais são zero em um ponto, temos que a função atinge seu valor máximo, mínimo ou sela nesse ponto. É nesse contexto que se encontra esse trabalho, estaremos interessados nesses pontos e iremos generalizar o conceito de função para famílias de funções equivalentes o que chamaremos de Germe de funções e estaremos interessados em classificar essas Germes.

METODOLOGIA

A natureza do projeto é de estudo bibliográfico, desta forma, no início da pesquisa foi solicitado que eu, como bolsista, buscasse os pré-requisitos essenciais para compreender o assunto as er abordado. Para isso, realizei uma revisão bibliográfica dos conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Análise na Reta. Além disso, estudei livros que forneceram os fundamentos necessários para compreender a Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis, dando assim um embasamento sólido para iniciar o estudo do conteúdo principal. Após adquirir esses pré requisitos, comecei a me aprofundar no tema da bolsa, por meio da leitura de artigos indicados pelo orientador, isso permitiu que eu me familiarizasse com a teoria de Singularidades e suas aplicações, dando os primeiros passos no estudo do tema do projeto e compreendendo sua importância e discussões. Durante o desenvolvimento da pesquisa, o orientador também sugeriu o estudo de materiais que me introduziram ao LaTeX e editores desse formato. Essa etapa foi fundamental para aprender a produzir textos mais adequados à escrita científica, preparando-me para a produção de trabalhos acadêmicos. Além disso, tivemos encontros semanais com o orientador, nos quais discutimos e esclarecemos dúvidas sobre os conteúdos estudados, bem como acompanhamos as atividades propostas. Esses encontros foram essenciais para o andamento do projeto e para meu desenvolvimento acadêmico.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Obtemos as classes de equivalência de uma aplicação de classe C^{∞} definida em aberto R^n em R^n por meio de uma mudança de coordenadas locais, que são difeomorfismos locais, no domínio e contradomínio. Estudamos o espaço vetorial real das aplicações polinomiais g em R^n em R^p de grau menor ou igual a k com g(0)=0, chamamos de espaço dos k-jatos. Estudamos a classe de todas as aplicações que são iguais a f em U de germe na origem em U, sendo f a aplicação e U um aberto onde 0 pertence a U. Sendo o germe $f : (R^n, 0) \to (R^n, 0)$, conseguimos obter uma lista parcial das classes de equivalência que são determinadas a menos de mudança de coordenadas em R^n com dois germes f e g R equivalentes quando existe um germe de difeomorfismo $h: (R^n, 0) \to (R^n, 0)$ tal que $f = g \circ h$. Classificamos as singularidades isoladas e codimensão finita. Estudamos a R equivalência entre os germes de funções complexas, classificamos os germes com coposto um e codimensão k, classificamos os germes de codimensão um e zero. Estudamos o primeiro e o segundo teorema de classificação de germes de R. Thom. Estudamos a A-equivalênca de germes do plano no

ISSN: 2447-6161

plano. Estudamos os germes com 2 jato (x, xy) e 2- jato (x, 0). Estudamos as órbitas de A-codimensão menor ou igual a 2 e germes com 2-jato (x, xy) e também estudamos as órbitas com 2-jato (x, o) em $J^3(2, 2)$. Os teoremas de R. Thom são: Para um germe $f \in m_n^2$ de coposto 1 e codimensão ≤ 5, a menos de uma soma deu ma forma quadrática não degenerada em $n-1$ variáveis, f é equivalente a um dos seguintes germes:

(i) x^3, se cod f = 2, dobra,

(ii) x^4, se cod f = 3, cúspide,

(iii) x^5, se cod f = 4, rabo de andorinha,

(iv) x^6, se cod f = 5, borboleta.

E o segundo teorema é que todo germe $f \in m^2$ n de coposto 2 e codimensão ≤ 5 é equivalente, a menos da soma de uma forma quadrática não degenerada em $n - 2$ variáveis, a um dos seguintes germes:

1. $x^3 - xy^2$ (umbílico eliptico),

2. $x^3 + y^3$ (umbílico hiperbolico) ou

3. $x^2y + y^4$ (umbílico parabolico).

CONCLUSÕES

A pesquisa realizada alcançou com sucesso o objetivo principal de estudar as singularidades, me proporcionando uma base sólida para o aprofundamento futuro no tema. A abordagem meticulosa e a análise detalhada do estudo da Teoria das singularidades me permitiu desenvolver uma compreensão abrangente e crítica do assunto, estabelecendo um pré-requisito essencial para estudos avançados. Além disso, a experiência oferecida pelo projeto me possibilitou uma imersão prática no campo da pesquisa, enriquecida por discussões contínuas com o orientador. Essas interações não só facilitaram o aprendizado e a aplicação de conceitos teóricos, mas também contribuíram para o meu crescimento acadêmico, me preparando para desafios futuros e promovendo um desenvolvimento mais robusto como estudante e pesquisador.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, porque, sem ele nada posso fazer e tudo o quet enho é graças a sua misericórdia. Agradeço ao professor-orientador Joserlan Perote pela oportunidade, e confiança que me foi depositada. Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da pesquisa intitulada classificação das singularidades em funções com codimensão menor ou igual a cinco e executada entre 01/09/2023 e 31/08,2024, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e tecnológica (Pibiti) da Unilab, isso faz com que, possamos nos dedicar melhor ao curso enquanto podemos estudar conteúdos que vão além das fronteiras da graduação. Agradeço a Unilab por ser a universidade em que curso minha graduação e por isso pude ter a oportunidade de conhecer

pessoas incríveis e fazer parte desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 1, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 2, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 3, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

APOSTOL, Tom M. Cálculo. Rio de Janeiro: Editora Reverté, 1979.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

Tenenblat, Keti; Introdução à Geometria Diferencial; Editora Universidade de Brasília; 1988.

CARMO, Manfredo Perdigão. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática- SBM, 2005.

Saunders, P.T.; An Introduction to Catastrophe Theory; Cambridge University Press; 1980.

EBELING, Wolfgang. Functions os several complex variable and their singularities. Tradução de Philip Spain. Providence: American Mathematical Society, 1992. Tradução de: Funktionentheorie, dierential topologie and singularitäten.

V.I. Arnol'd, A. Varchenko & S. Gusein-Zade, Singularities of differentiable maps. Vol. I, Monographs in Mathematics, 82, Birkhäuser, 1985.

Bruce, J. W; Giblin, P. J. Curves and Singularities, second edition, Cambridge University Press, 1992.

Gibson, C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Pitman, 1979.

R. Thom, Stabilité structurelle et morphogénèse. (French) Essai d'une théorie générale des modèles, Mathematical Physics Monograph Series. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1972. 362 pp.

C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map germs, Bull. London Math. Soc. 13, (1981), 481–539.

MILNOR, John. Singular points of complex hypersurfaces. Princeton: Princeton University

Press, 1968.

H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374–410.

DIMCA, Alexandru. Singularities and topology of hypersurfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.

J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.