



## CAMPOS VETORIAIS DE KILLING SOBRE O ESPAÇO HIPERBÓLICO

Elenitha De Sousa Felix<sup>1</sup>  
João Francisco Da Silva Filho<sup>2</sup>

### RESUMO

O presente trabalho é resultado de um projeto de iniciação científica que se refere a campos vetoriais de Killing (ou simplesmente, campos de Killing) definidos sobre o espaço hiperbólico. De modo geral, campos de Killing sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores que possuem derivada de Lie identicamente nula. Além disso, os referidos campos de vetores são um caso particular de campos conformes, isto é, campos conformes em que o fator conforme é uma função identicamente nula. Importante ainda salientar que os campos de Killing estão diretamente relacionados com as isometrias locais e com as curvas geodésicas. O espaço hiperbólico, por sua vez, é uma das mais simples e conhecidas formas espaciais, possibilitando um estudo mais compreensível para o nível de Graduação. Nesse contexto, foram aplicados conceitos e recursos de Cálculo Diferencial, Integral e Vetorial juntamente com tópicos de Álgebra Linear no estudo de campos de Killing no espaço Euclidiano e posteriormente, no estudo de campos de Killing no espaço hiperbólico. Em vista disso, tornou-se possível chegar a uma caracterização para uma classe de campos de Killing definidos sobre o espaço hiperbólico, por meio de uma conhecida caracterização dos campos de Killing no espaço Euclidiano e mudança conforme de métrica que relaciona diretamente esses dois espaços.

**Palavras-chave:** Campos de Killing; Espaço Euclidiano; Espaço Hiperbólico.

---

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN, Discente, elenithasousa@gmail.com<sup>1</sup>  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN, Docente, joaofilho@unilab.edu.br<sup>2</sup>



## INTRODUÇÃO

Os campos de Killing definidos sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores, cuja derivada de Lie da métrica Riemanniana em sua direção é um tensor identicamente nulo e nessas circunstâncias, a referida métrica é invariante pelo fluxo do campo de vetores. Por outro lado, os campos de Killing constituem um interessante caso particular de campos de vetores conformes (ou simplesmente, campos conformes), uma vez que podem ser interpretados como campos conformes que possuem fator conforme identicamente nulo (cf. CARMO, 2005 e PETERSEN, 1998).

Vale destacar que, os campos de Killing estão presentes no estudo de imersões sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço hiperbólico), bem como em produtos diretos, variedades homogêneas e superfícies de revolução. No contexto das formas espaciais, pode-se encontrar vários exemplos de campos de Killing no espaço Euclidiano, na esfera Euclidiana e no espaço hiperbólico. Destacam-se os exemplos sobre o espaço Euclidiano, obtidos através de campos de vetores afins determinados por matrizes antissimétricas (cf. CARMO, 2005 e O'NEILL, 1983).

Sobre o espaço hiperbólico, que corresponde uma variedade Riemanniana completa que possui curvatura seccional constante negativa (cf. CARMO, 2005) e uma das principais formas espaciais, pode-se garantir a existência de diversos campos de Killing em decorrência da sua homogeneidade (cf. O'NEILL, 1983). Por outro lado, uma consequência do espaço hiperbólico ser conformemente Euclidiano, é a possibilidade de estabelecer algumas relações que auxiliam no estudo dos campos de Killing, bem como fazer comparações entre propriedades desses campos de vetores nos espaços hiperbólico e Euclidiano.

## METODOLOGIA

A pesquisa realizada no decorrer do projeto teve a duração de um ano, iniciando em outubro de 2023 e finalizando em setembro de 2024. Nos primeiros meses, foi feito um estudo sobre as matrizes simétricas e antissimétricas, visando o estudo dos campos de Killing no espaço Euclidiano, correspondendo à aquisição dos pré requisitos necessários para a compreensão dos campos de Killing no espaço hiperbólico. Dessa forma, durante os meses de setembro de 2023 a março de 2024, foram estudados conteúdos sobre os espaços Euclidiano e hiperbólico, bem como estruturas geométricas definidas nesse espaço Riemanniano.

Na sequência, realizou-se o estudo de campos de vetores gradiente de uma função real suave definida no espaço hiperbólico, partindo da definição em termos do gradiente no contexto Euclidiano e seguindo com exemplos. A mesma metodologia foi empregada para o estudo do divergente de um campo de vetores suave no espaço hiperbólico em termos do divergente Euclidiano, foi estudado também laplaciano e hessiano de uma função real suave definida no espaço hiperbólico, chegando ao estudo de derivada de Lie de um campo de vetores suave.

Durante esse primeiro período, a metodologia adotada foi a leitura de artigos e trabalhos de conclusão de curso, bem como reuniões semanais com o orientador, que auxiliaram no esclarecimento de dúvidas, possibilitando discussões sobre o conteúdo e acompanhamento das atividades de um modo geral seguindo um estudo gradativo previsto no Plano de Trabalho. No segundo semestre do projeto, que contempla o período de abril a setembro de 2023, foram estudados os conteúdos referentes apenas ao estudo sobre campos de Killing no espaço hiperbólico.

Dessa maneira, foi possível construir vários exemplos de campos e Killing no espaço hiperbólico e chegar a uma caracterização parcial dos referidos campos de vetores, partindo de exemplos de campos de Killing no espaço Euclidiano, bem como de uma conhecida caracterização desses campos de vetores e de mudança conforme de métrica, que permite relacionar diretamente os espaços Euclidiano e hiperbólico. No que diz respeito à elaboração desse trabalho, reuniu-se o material produzido durante a vigência do projeto para apresentar de forma sucinta as conclusões obtidas a partir desse estudo.

## **RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Estudar os campos de Killing nos permite compreender um pouco mais sobre curvas geodésicas, isometrias locais, e curvatura escalar dos espaços Riemannianos nos quais estes campos de vetores estão definidos, além de outras estruturas geométricas (cf. CARMO, 2005, PETERSEN, 1998, TASHIRO, 1965, OBATA e YANO, 1970). Entretanto, construir exemplos de campos de Killing usando diretamente as suas respectivas definições não costuma ser uma tarefa muito simples, devido à complexidade da expressão da derivada de Lie, mesmo tratando-se do espaço Euclidiano (cf. FERNANDES, SILVA e SILVA FILHO 2022).

Nesse sentido, com os estudos realizados foi possível formular conjecturas e chegar a algumas conclusões sobre os campos de Killing no espaço hiperbólico. Mais precisamente, ao final do estudo, pudemos chegar a uma caracterização para uma classe de campos de Killing, definidos sobre o espaço hiperbólico, por meio de campos de Killing no espaço Euclidiano. Em outras palavras, a caracterização que chegamos possibilitou exibir vários campos de Killing definidos sobre o espaço hiperbólico.

A classe de campos que fora construída pode ser representada por meio de matrizes quadradas antissimétricas, também usadas na caracterização dos campos de Killing definidos no espaço Euclidiano. Basicamente, usa-se esse tipo de matriz para obter campos de Killing no espaço Euclidiano que sob condições específicas, podem ser restritos ao semi-plano superior do espaço Euclidiano para fornecer campos de Killing definidos sobre o espaço hiperbólico.

Por fim, vale destacar ainda que está sendo desenvolvido um artigo, intitulado por “Revisitando os Campos Conformes sobre o Espaço Euclidiano” (cf. SILVA FILHO, FERNANDES e FELIX, 2024) que reúne as principais conclusões obtidas ao longo do projeto. Este artigo é uma parceria com o professor orientador e com a discente Larissa Braga Fernandes, egressa do curso de Licenciatura em Matemática da Unilab, que atualmente cursa mestrado em Matemática na Universidade de São Paulo – USP.

## **CONCLUSÕES**

Diante do exposto, fazendo uso dos conhecimentos mais elementares sobre os campos de Killing definidos no espaço Euclidiano, conseguiu-se trabalhar as estruturas e conceitos necessários para o desenvolvimento do projeto e de acordo com o que foi mencionado anteriormente, o estudo possibilitou que a pesquisa chegasse a uma caracterizações para os campos de Killing no espaço hiperbólico. Além disso, é importante destacar a contribuição no artigo “Revisitando os Campos Conformes sobre o Espaço Euclidiano” (cf. SILVA FILHO, FERNANDES e FELIX, 2024), que encontra-se em fase de elaboração.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira Unilab e ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) pela concessão da bolsa de iniciação científica e ao Professor Dr. João Francisco pela indicação e orientação.

## REFERÊNCIAS

- BUENO, H. P. Álgebra Linear: Um Segundo Curso. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- CARMO, M. P. do Geometria Riemanniana. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).
- FERNANDES, L. B., SILVA, M. B. e SILVA FILHO, J. F. Funções Complexas Holomorfas e Campos Conformes. Revista Matemática Universitária- RMU, v. 2, p. 144-165, 2022.
- GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5. ed. vol. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- LIMA, E. L. Álgebra Linear. 8ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. Journal Differential Geometry, v. 4, p. 53-72, 1970.
- O'NEILL, B. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, New York: Academic Press (1983).
- PETERSEN, P. Riemannian geometry. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate Texts in mathematics, v. 171.)
- SILVA FILHO, J. F.; FERNANDES, L. B.; FELIX, E. S.. Revisitando os Campos Conformes sobre o Espaço Euclidiano, Redenção, 2024 (Artigo em Elaboração).
- TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. Transactions of the American Mathematical Society, v. 117, p. 251-275, 1965