INTRODUÇÃO A CLASSIFICAÇÃO E ESTUDO DE PONTOS CRÍTICOS

Sávio José Ferreira De Souza[1]
Joserlan Perote Da Silva [2]

RESUMO

Em primeira análise, o objetivo principal desse trabalho é fazer um estudo introdutório sobre as singularidades e os seus pontos críticos. As Singularidades matemáticas referem-se a pontos ou situações em que uma função apresenta características incomuns ou especiais. Em resumo, são pontos onde o comportamento da função é distinto ou diverge do padrão esperado. A pesquisa aborda conceitos na área de cálculo diferencial e integral I, II e III, conceitos esses como derivadas parciais, matrizes Hessianas, Jacobianas e conceitos envolvendo séries. A primeira parte, do estudo busca classificar funções e estudar seus pontos, sendo esses, máximo, mínimo e de sela. Além disso, o projeto busca fazer uma distinção entre tipos de pontos críticos, classificados em degenerados e não degenerados. Em outra perspectiva, o lema de Morse surge, e é abordado afim de compreender como seriam os tipos de funções que possuem pontos críticos e como essas se comportam, busca também encontrar modelos de funções em que os pontos críticos ocorram. Ademais, vale ressaltar que o estudo das singularidades exige alguns conceitos matemáticos mais delicados. Em suma, é importante citar que o presente trabalho também contempla a utilização de softwares matemáticos, como escrita em Latex, ferramentas que auxiliam na construção de gráficos e geogebra.

Palavras-chave: Classificação; Singularidade; Pontos críticos; Funções.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Ceará , Discente, savio.aluno@hotmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira(Unilab), Ceará , Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

A teoria das singularidades é um campo bastante extenso, com aplicações em diversas áreas como física teórica, geometria de curvas e topologia, sendo uma extensão do cálculo diferencial e integral. Nesse sentido, durante a disciplina cálculo diferencial I, são introduzidos máximos e mínimos para funções de uma variável, enquanto no Cálculo III, o estudo avança com o uso de derivadas parciais, permitindo analisar funções de várias variáveis. Este projeto se aprofunda no estudo de funções com pontos críticos, buscando compreender sua forma geral. Nesse sentindo, dada uma função bem definida no intervalo de estudo, essa pode ser descrita e interpretada, dependendo do caso essa pode ser substituída por famílias de funções que ajudem a facilitar, a sua descrição e seu modelo. Ademais, A classificação dos pontos críticos, se dá inicialmente em pontos degenerados e não degenerados, com base no cálculo da matriz Hessiana. Por definição a matriz hessiana 2x2 é uma matriz quadrada composta pelas segundas derivadas parciais de uma função de duas variáveis. É observável que por definição um pontos é dito crítico se todas as suas derivadas parciais se anulam. Por esse ângulo, as funções que possuem pontos críticos não degenerados são totalmente compreendidas pelo lema de Morse, enquanto as que possuem os degenerados encerram uma análise mais complexa, envolvendo teoremas adicionais. Assim, o estudo das singularidades oferece uma visão detalhada sobre o comportamento das funções do tipo f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com f de C^∞. Vale a observar que a principal abordagem tratada no presente trabalho, está focada em pontos críticos não degenerado e para $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ou seja, um caso particular do lema de Morse, uma vez que esse compreende até o $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

METODOLOGIA

Inicialmente, uma das principais metodologias realizadas foi a de aquisição de pré-requisitos exigidos na pesquisa, esses de diversas áreas, por exemplo, análise real. Um dos pontos cruciais dessa atividade foi a leitura de livros adicionais, como o estudo da coletânea de Análise Real do Elon Lages Lima, sendo essenciais para entender conceitos matemáticos, como derivadas, diferenciabilidade e conceitos envolvendo continuidades. Além disso, quando necessário, o uso vídeo-aulas complementares sobre assunto proposto. Por outro ângulo, outra atividade realizada dizia respeito ao exercício e manuseio de escrita em Latex, feita através de estudos de artigos indicados pelo orientador juntamente de vídeo-aulas. Outrossim, foram realizados encontros semanais com o orientador. Em tais encontros, eram tiradas dúvidas a respeito do tema estudado e problemáticas que surgiam ao longo da pesquisa. Ademais, nos encontros, também eram vistos assuntos complementares da pesquisa. No estudo, foram utilizados artigos acerca da pesquisa e explicações no quadro branco em sala de aula. Houve também, dentro da metodologia do orientador, uma incitação para a aprendizagem e construção de gráficos na linguagem Latex/tikz.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um dos primeiros resultados alcançados diz respeito à classificação de pontos críticos, esses feitos entre degenerados e não degenerados. Essa classificação se dá através dos cálculos do determinante da matriz conhecida como Hessiana, se o det H = 0, o ponto crítico é degenerado, se det H ≠ 0, não é degenerado. Um exemplo para funções de duas variáveis seria, f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que:

$f(x,y) = x^2 + y^2$;

$\nabla f = \langle 0, 0 \rangle$.

$\langle \partial f/\partial x , \partial f/\partial y \rangle = \langle 0,0\rangle \Leftrightarrow \langle 2x,2y\rangle = \langle 0,0\rangle$.

Temos assim que x=0 e y=0. Dessa maneira, temos que o ponto crítico é (0,0). Ao realizarmos o cálculo dá matriz hessiana concluímos que essa função possuí um ponto não degenerado. Dando continuidade, a primeira classificação relevante se relaciona à pontos críticos não degenerados. Nesse viés, O Teorema de Morse afirma que seja $u \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico de tipo não degenerado da função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Então existe uma mudança de coordenadas ψ: $\mathbf{U}\to\mathbb{R}^n$, onde U é uma vizinhança do ponto em questão, tal que f composta ψ:U→ $\mathbb{R}$ é dada por,

$$(fo\psi)(u)=f(u) - y_1^2 - y_2^2 -...-y_l^2+y^2_{l+1} + ...+y^2_n \ ,\forall \ y=(y_1,...,y_n) \in \mathbf{U} \ , 1\leq l \leq n.$$

Com alguns lemas, foi possível classificar famílias de funções, ou seja, foi possível descrever os possíveis formatos das funções apenas utilizando a função inicial e aplicando os conceitos de Morse. Desse modo, foi possível concluir que na vizinhança de "f" existem funções que conseguimos usar para compreendê-la sem a perda das propriedades estudadas. Assim, foi possível encontrar através dessas famílias de funções determinados modelos possíveis para quando "f" possuir com pontos críticos não degenerados. Para o caso n=2, temos sem perda das propriedades que seja o ponto u, tal que $u \in \mathbb{R}^2$ o seu ponto crítico supostamente será u=(0,0).Logo, como u é ponto crítico da função suas derivadas parciais de primeira ordem são zero, ou seja, $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y= 0$ em (0,0). Dando continuidade, quando tomamos a série de Taylor desenvolvemos até sua segunda ordem e fazendo as devidas considerações vamos chegar que nossas funções podem ser descritas como:

1. $(x,y) \to d+ X^2 +Y^2$;
2. $(x,y) \to d+ X^2 - Y^2$;
3. $(x,y) \to d-X^2 - Y^2$.

Onde d é f(0,0) e X e Y são as por assim dizer as funções de substituição. Além disso, Em um segundo momento, é possível mostrar uma classificação semelhante para os pontos críticos degenerados, mas esses exigiram conceitos diferentes, mas de certa maneira, é possível achar famílias de funções e seus respectivos modelos são do tipo:

1. $(x,y) \to x^3 +xy^2$;
2. $(x,y) \to x^3 + y^3$;
3. $(x,y) \to x^2y+y^4$.

Em geral, trabalhar em ambientes do tipo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, é mais simples, pois nesse temos a possibilidade de observar os gráficos. Porém, os lemas e teoremas abordados no projeto estão bem definido para o $\mathbb{R}^n$, com C^∞.

CONCLUSÕES

Em conclusão, o projeto se propôs fazer um estudo a respeito das singularidades matemáticas, expandindo o entendimento sobre pontos críticos em funções, como máximos, mínimos e pontos de sela. A pesquisa explora a aplicação de conceitos fundamentais de cálculo diferencial e integral, como derivadas parciais e matrizes Hessianas, para classificar e analisar esses pontos, diferenciando entre pontos críticos degenerados e não degenerados, com o suporte do lema de Morse para casos não degenerados. A distinção entre os tipos de singularidades revela a complexidade do estudo, exigindo ferramentas matemáticas mais avançadas e um profundo entendimento teórico. Além disso, vale ressaltar que o uso de softwares matemáticos, como LaTeX e GeoGebra, complementou a pesquisa, permitindo a construção de gráficos e representações visuais. O projeto também envolveu a aquisição de pré-requisitos importantes por meio da leitura de textos adicionais e a realização de encontros semanais com o orientador para discussões e aprofundamento em temas complementares. Ao final, o estudo das singularidades se apresenta como uma extensão natural do cálculo diferencial, com vastas aplicações em diversas áreas, consolidando assim sua relevância e vastidão no campo matemático. Em suma, houve satisfação com os resultados alcançado, tanto por parte do aluno quanto por parte do orientador, visto que o projeto conseguiu atingir seus objetivos iniciais e fornecer uma contribuição relevante para o estudo das singularidades em especial para funções de duas variáveis. O desenvolvimento de famílias de funções a partir dos conceitos de Morse resinifica o estudo e abre novas possibilidades de exploração, especialmente em áreas que envolvem pontos críticos degenerados e suas classificações.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da pesquisa intitulada Pontos Críticos de Aplicações Diferenciais e executada entre 01/10/2023 e 30/09/2024, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e tecnológica (Pibiti) da Unilab, isso faz com que, possamos nos dedicar melhor ao curso enquanto podemos estudar conteúdos que vão além das fronteiras da graduação.

REFERÊNCIAS

[1] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 1, 5a Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[2] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 2, 5a Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[3] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 3, 5a Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[4] APOSTOL, Tom M. Cálculo. Rio de Janeiro: Editora Reverté, 1979.
[5] LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
[6] LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 11a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
[7] Tenenblat, Keti; Introdução à Geometria Diferencial; Editora Universidade de Brasília; 1988.
[8] CARMO, Manfredo Perdigão. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática- SBM, 2005.
[9] Saunders, P.T.; An Introduction to Catastrophe Theory; Cambridge University Press; 1980.
[10] EBELING, Wolfgang. Functions os several complex variable and their singularities. Tradução de Philip Spain. Providence: American Mathematical Society, 1992. Tradução de: Funktionentheorie, dierentialtopologie and singularitäten.
[11] V.I. Arnol'd, A. Varchenko & S. Gusein-Zade, Singularities of differentiable maps. Vol. I, Monographs in

ISSN: 2447-6161

Mathematics, 82, Birkhäuser, 1985.
[12] Bruce, J. W; Giblin, P. J. Curves and Singularities, second edition, Cambridge University Press, 1992.
[13] Gibson, C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Pitman, 1979.
[14] R. Thom, Stabilité structurelle et morphogénèse. (French) Essai d'une théorie générale des modèles, Mathematical Physics Monograph Series. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1972. 362 pp.
[15] C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map germs, Bull. London Math. Soc. 13, (1981), 481–539.
[16] MILNOR, John. Singular points of complex hypersurfaces. Princeton: Princeton University Press, 1968.
[17] H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374–410.
[18] DIMCA, Alexandru. Singularities and topology of hypersurfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.
[19] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.

ISSN: 2447-6161