ANÁLISE DA AÇÃO DE SISTEMAS SIMPLES POR MEIO DE TRAJETÓRIAS ADJACENTES

Antônio Isael Paz Pires[1]
João Philipe Macedo Braga[2]

RESUMO

Neste estudo, desenvolve-se uma abordagem pedagógica alternativa para a análise da segunda derivada da Ação em relação à partícula livre e ao oscilador harmônico simples unidimensional, empregando o conceito de trajetórias adjacentes. Nota-se que, no caso da partícula livre, a Ação mantém-se como um mínimo, enquanto para o oscilador harmônico simples, depende do tempo de observação, sendo que há a possibilidade de atingir valores máximos em intervalos temporais que ultrapassam meio período do oscilador. Este método simplifica significativamente a complexidade matemática inerente a abordagens discutidas em textos mais avançados de Física, tornando-o particularmente eficaz no contexto do ensino do Princípio de Hamilton. Além disso o método é capaz de proporcionar aos estudantes uma compreensão mais acessível desse conceito chave dentro da Mecânica Analítica que é o de mínima Ação. Dentro desse contexto, esta abordagem pedagógica oferecerá uma valiosa ferramenta para instrutores que desejam facilitar a compreensão desses princípios em sala de aula.

Palavras-chave: mecânica analítica; princípio de Hamilton; mínima ação.

Universidade Federal do Ceará, Campus do Pici, Discente, isaelpeace@gmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, Campus dos Palmares, Docente, philipe@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

A mecânica analítica se fundamenta no Princípio de Hamilton, que estipula que o movimento de um sistema entre dois instantes diferentes ocorre de tal maneira que a integral de linha, denominada Ação ou integral de Ação, atinja um valor estacionário ao longo da trajetória real do movimento, conforme estabelecido por Goldstein, Poole, Safko (2001). Embora não seja consensual, alguns autores, como Thornton e Marion (2007) e Landau e Lifshitz (1976), se referem à Ação como tendo um valor mínimo em vez de estacionário.

Uma das questões iniciais que emergem ao estudar esse princípio é se a Ação sempre assume um valor mínimo ou pode, em algumas circunstâncias, atingir um valor máximo. Esta indagação raramente é abordada na literatura de física. A análise dos trabalhos de Goldstein, Poole, Safko (2001), Thornton e Marion (2007), Landau e Lifshitz (1976), e Lemos (2007) revela uma escassez de esclarecimentos sobre este tópico. Apesar de existirem estudos, como os apresentados em Gray (2007) e Freire (2012), que empreendem discussões detalhadas sobre a possível não-minimalidade da Ação de um sistema, inclusive demonstrando que a solução da equação de movimento do oscilador harmônico simples constitui um ponto de sela para intervalos de tempo superiores a meio período, tais tratados podem parecer densos e desafiadores para estudantes iniciantes em mecânica analítica, pois apresentam uma Matemática bem sofisticada que normalmente o estudante que está estudando Mecânica Analítica não estará familiarizado.

Nesse contexto, este estudo se propõe a realizar uma análise da Ação em relação à partícula livre e ao oscilador harmônico simples unidimensional através de trajetórias adjacentes que conduzem a um estado de estacionariedade na Ação do sistema. Isso possibilita a comparação do valor da Ação associado à trajetória física com aquele associado a trajetórias adjacentes em um intervalo de tempo definido no espaço de configuração do sistema.

METODOLOGIA

O método proposto neste estudo baseia-se na comparação dos valores da Ação, determinados por meio de curvas adjacentes à solução física obtida a partir das equações de Euler-Lagrange. Para este fim, introduz-se um parâmetro denominado de "lambda" (λ). A estratégia consiste em calcular a Ação exclusivamente em função do parâmetro "lambda" e, posteriormente, avaliar se a Ação resultante é sempre superior ou inferior à Ação obtida para as soluções físicas (quando "lambda" é igual a zero). A comparação entre esses valores nos permitirá determinar se a Ação corresponde a um mínimo ou a um máximo.

O método pode ser aplicado seguindo os seguintes passos:

Passo 1: Inicialmente, é necessário encontrar a solução do problema por meio da resolução das equações de Euler-Lagrange.

Passo 2: Em seguida, procura-se uma curva adjacente à solução física encontrada no Passo 1. Essa curva deve compartilhar dois pontos fixos em um intervalo específico.

Passo 3: Avança-se calculando a integral da Ação, que passará a depender exclusivamente do parâmetro "lambda".

Passo 4: Por fim, no último passo, analisa-se se a solução final possui um mínimo ou a um máximo. Se a solução possuir um máximo, isso indica que a Ação é máxima para as soluções das equações de Euler-Lagrange. Por outro lado, se a solução possuir um mínimo, a Ação será mínima para essas mesmas soluções.

Esses quatro passos constituem a totalidade do método.

É importante destacar que o conhecimento necessário para a aplicação deste método se limita ao domínio do cálculo diferencial e integral, em contraste com outros métodos que requerem conhecimento variacional

ISSN: 2447-6161

(GRAY, 2007).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao empregar esse método analítico em dois sistemas simplificados, a saber, o oscilador harmônico simples e a partícula livre, observa-se que, no caso da partícula livre, a Ação sempre exibe um máximo global invariável. Entretanto, no contexto do oscilador harmônico simples unidimensional, a natureza da Ação é condicionada pelo período de observação. Constata-se que, para intervalos temporais equivalentes à metade de um período, a Ação é minimizada, enquanto que, para intervalos temporais que ultrapassam a metade de um período, a Ação é maximizada, corroborando com estudos anteriores, conforme evidenciado por Gray (2007) e Freire (2012).

Estes resultados ilustram a eficácia do método na obtenção de resultados consistentes com as descobertas previamente estabelecidas na literatura. Além disso, ressalta-se que esta abordagem metodológica oferece simplicidade e exige uma base matemática menos complexa, tornando-a acessível a estudantes que tenham atingido o nível intermediário de cursos de física. Isso possibilita uma discussão aprofundada sobre um tópico de relevância significativa na Mecânica Analítica.

CONCLUSÕES

Com o propósito de facilitar a compreensão dos alunos ingressantes em cursos de ensino superior acerca do princípio de Hamilton, mais especificamente, em relação à sua natureza de máximo ou mínimo, a introdução deste estudo introduziu uma abordagem simplificada deste tópico frequentemente subexplorado nos principais livros texto.

Para atingir tal objetivo, utilizou-se de uma metodologia pedagogicamente mais didática para a análise da Ação, que envolve a consideração de trajetórias adjacentes à trajetória física e a comparação da Ação correspondente.

Os resultados demonstram que, no caso de uma partícula livre unidimensional, a Ação é consistentemente minimizada. No entanto, no contexto de um oscilador harmônico simples, o resultado varia com base no período de observação. Para intervalos de tempo menores que meio período, a Ação é minimizada, enquanto que para intervalos de tempo maiores que meio período, a Ação é maximizada, corroborando com resultados bem consolidados na literatura.

Esses resultados ressaltam a eficácia do método em obter valores apropriados. Além disso, é importante notar que, ao contrário de abordagens previamente descritas na literatura, o método se destaca por sua simplicidade e requer apenas um conhecimento matemático que se limita ao domínio do Cálculo diferencial e integral.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro ao longo do Doutorado em Física.

REFERÊNCIAS

FREIRE, W. H. C. A derivada funcional de segunda ordem da Ação: investigando minimalidade, maximalidade e "ponto" sela. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 1, p. 1301, 2012.

GRAY, C.G.; TAYLOR, E. F. When action is not least. American Journal of Physics, v. 75, n. 5, 2007.

GOLDSTEIN, Hebert; POOLE, Charles; SAFKO, John. Classical Mechanics. 3. ed. New York: Pearson, 2001. 664 p. ISBN 9780201657029.

LANDAU, L.D; LIFSHITZ, E. M. Mechanics. 3. ed. [S. l.]: Butterworth-Heinemann, 1976. 224 p. v. 1. ISBN 0750628960.

LEMOS, N.A. Mecânica Analítica. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 388 p. ISBN 8588325241.

THORNTON, S.T; MARION, J.B. Classical dynamics of particles and systems. 5. ed. Virginia: Brooks/Cole, 2007. 660 p. ISBN 0495556106.

ISSN: 2447-6161