REGULARIDADE MÉTRICA DE ALGUMAS SUPERFÍCIES SINGULARES VIA PROJEÇÕES

Aruna Djafuno[1]
Rodrigo Mendes Pereira[2]

RESUMO

Neste projeto desenvolvido na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira(Unilab) entre outubro de 2022 a outubro de 2023, foram obtidos critérios e condições de regularidade métrica de algumas superfícies algebricamente parametrizadas a partir das chamadas quase-isometrias. A execução desse projeto foi através de encontros presenciais (e conversas adicionais via google meet) de orientando com o orientador através de aula expositivas, envios de livros e materiais sobre o assunto e listas de exercícios. Além disso, houve discussão e explicações intuitivas sobre objetos geométricos com interpretações livres de formalidade. Sobre o tema do projeto, podemos dizer que na natureza, existem os níveis de regularidade de objetos e/ou fenômenos naturais, por exemplo. Os modelos usuais de regularidades de objetos aparecem no cálculo de várias variáveis quando se estuda gráfico de funções suaves, por exemplo. Tais gráficos podem ser projetados localmente de modo diferenciável (e com inversa diferenciável). Localmente, tais superfícies tem aspecto de uma casca de maçã (algo suave literalmente falando). Neste projeto foi estudado uma condição mais geral de regularidade: superfícies tal que para cada um de seus pontos, podemos selecionar uma vizinhança desse ponto na superfícies que se projeta num plano de modo que as distâncias no domínio e na imagem sejam equivalentes. Tais superfícies foram chamadas metricamente regulares. Do cálculo III, segue que todo gráfico de função suave é uma superfície metricamente regular. As superfícies metricamente regulares têm aspecto semelhante a suavidade, mas pode ter alguns bicos ou pequenas dobras (não tão amassadas). Nesse projeto, começamos a obter algumas superfícies metricamente regulares, cujas projeções não são necessariamente suaves. Foi exibido quase-isometrias para superfícies da forma $F(x,y)=(x,F(x,y),G(x,y))$, de tal modo que há possíveis bifurcações somente num ponto. Isso foi mostrado por equações. Espera-se obter e estender as técnicas do presente trabalho, para obter várias listas de superfícies metricamente regulares.

Palavras-chave: superficies; equivalencias; projeçoes; transformaçoes.

Unilab, ICEN, Discente, djafunoa8@gmail.com[1]
Unilab, ICEN, Docente, rodrigomendes@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

Uma forma de medir o quanto uma superfície deixa de ser suave é medir o quão sua distância intrínseca se afasta da distância usual (medida a partir de um segmento) entre pontos do espaço euclidiano. Dada uma superfície X no espaço euclidiano, dizemos que X é suave em um ponto x de X quando existe uma parametrização F: B(0,1)C R2→Rn, n≥3, tal que F(0)=x e F é uma aplicação suave, isto é, sua matriz derivada tem posto 2. Por resultados de cálculo, essa parametrização satisfaz o seguinte: Existem constantes positivas A,B maiores do que zero tal que A||p-q|| Considerando a exposição acima, começam naturalmente perguntas investigativas:

1. Como se pode determinar essas transformações que garantam a suavidade das superfícies?
2. Como podemos provar que uma superfície parametrizada (no espaço euclidiano) é metricamente regular?
3. Mais especificamente: como achar as constantes A,B˃0 para provar que aplicações da forma F(x,y)=(x,F(x,y), G(x,y)) cujo domínio é uma bola é metricamente equivalente a um plano? Estes são alguns problemas que foram resolvidos durante a execução desse projeto.

Ainda durante esse projeto, foram utilizados alguns aplicativos/softwares e livros para estudar o comportamento de várias superfícies polinomialmente parametrizadas no espaço euclidiano. Além disso, foram esboçadas muitas curvas e superfícies interessantes (não metricamente regulares) que ajudaram na compreensão de comportamento desses objetos.

Ressalta-se que o principal objetivo deste projeto consiste em estudar as condições de regularidade métrica das superfícies cuja derivada Jacobiana tem posto 1 em um dos seus pontos e o discriminante de cada projeção é um ponto. Adicionalmente, tem-se forte interesse em descobrir uma lista de parametrizações de superfícies regulares ou não, através de algumas técnicas desenvolvidas durante o projeto.

METODOLOGIA

Esse projeto foi executado através dos encontros presenciais do orientador com orientando. Onde o orientador ministrava aulas de exposição e interativas, enviava livros e listas de exercícios para o orientando de forma gradativa. Também haviam encontros via google meet e explicação do orientando sobre seus avanços sobre o assunto.

Matematicamente falando, seguimos seguinte roteiro/metodologia:

1)A derivada de uma parametrização pode ter posto 2, 1 ou 0. Ter posto 2 significa suavidade. Então, o ambiente onde podemos encontrar possíveis configurações métricas interessantes é quando o posto da matriz Jacobiana for 1 ou 0.

2)Seguindo naturalmente, em grau de complexidade, o foco é no caso de posto 1 (o posto 0 é mais degenerado, com possíveis complicações)

Usando cálculo III, qualquer parametrização de posto 1 pode ser escrita na forma (x,F(x,y), G(x,y)). Ainda usando isomorfismos lineares do espaço euclidiano, pode-se admitir que F(x,0)=G(x,0)=0, ou seja, tais funções não possuem termos independentes em x.

3)Agora, olhanmos para as chamadas expansões polinomiais de uma variável, quando considera-se as funções F(0,y) e G(0,y). Em seguida ordena-se pela ordem (que é o menor expoente que aparece em tais expansões na variável y).

4)Daí, foram analisadas as condições para a dada aplicação (x,F(x,y)) (que é parte da parametrização (x,Fx,y),G(x,y))) ser injetiva (esse estudo não é simples e levou tempo/semanas consideráveis de estudo).

5)Depois estudamos condições para que a parametrização (x,F(x,y), G(x,y)) seja uma quase isometria a partir

ISSN: 2447-6161

da condição do discriminante da aplicação (x,F(x,y)) seja só um ponto.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere os seguinte problemas:
Seja a aplicaçao H: B(0,r)C R^2→R^3; H(x,y)=(x,F(x,y), G(x,y)). Seja X a imagem dessa parametrização. E admita que o discriminante determinante dado pelo determinante (1 0 F_x(x,y) F_y(x,y)) =0 (F_x, F_y indicando derivadas parciais) tem como solução somente o ponto (0,0). Para as várias parametrizações satisfazendo essa equação, foi mostrado que X é metricamente equivalente ao plano através de seguintes procedimentos:
a) Foi mostrado que a projeção da superfície X no plano é bijetiva;
c) Depois mostramos que a aplicação H é uma quase-isometria.

CONCLUSÕES

Durante esse projeto foram estudadas e codificadas as condições de regularidade métrica das superfícies cuja derivada Jacobiana tem posto 1 em um dos seus pontos e o discriminante de cada projeção é um ponto. Além disso, foram encontradas e esboçadas várias superfícies metricamente regulares. Esperamos descobrir, na continuação desta investigação, uma lista de parametrizações de superfícies regulares ou não, através de algumas técnicas desenvolvidas durante o projeto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Unilab pelo financiamento da pesquisa intitulada REGULARIDADE MÉTRICA DE ALGUMAS SUPERFÍCIES SINGULARES VIA PROJEÇÕES e executada entre 01/10/2022 a 31/10/2023, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e Tecnológica (Pibiti).

REFERÊNCIAS

Bortolossi H.J Cálculo Diferencial a Várias Variáveis; ed. PUC-Rio; São Paulo: Loyola, 2002.
Callioli, C.A; Domingues, H.H e Costa, R.C.F., Álgebra Linear e Aplicações, 4a. edição, São Paulo, Atual, 1983.

Lima E.L: Espaços Métricos; ed. IMPA; Rio de Janeiro; 2020.
Mendes, R. Geometria métrica e topologia de superfícies algebricamente parametrizadas. Tese de doutorado, UFC, 2016.

ISSN: 2447-6161