PROBLEMAS CLÁSSICOS EM GEOMETRIA DIFERENCIAL COM MÉTODO DAS VARIAÇÕES

José Messias[1]
Rafael Diógenes[2]

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar e resolver alguns problemas clássicos em geometria diferencial com o uso do método das variações, também conhecido como cálculo das variações, que surgiu da tentativa de matemáticos ao longo dos anos de generalizar a teoria de máximos e mínimos do Cálculo Diferencial para funções cujo domínio consistisse em certos conjuntos de curvas ou funções. Os problemas clássicos propostos são: encontrar a curva com a menor distância entre dois pontos em uma superfície, cuja solução é uma curva geodésica; encontrar entre as superfícies de revolução com bordo paralelo qual possui área mínima, cuja solução é a catenoide; encontrar entre as curvas fechadas e simples em R^2 de comprimento fixo a que possui a maior área, cuja solução é o círculo, esse problema também é conhecido como Problema Isoperimétrico. Em essência, os problemas lidam principalmente com a determinação de pontos críticos e a obtenção de máximos ou mínimos de funcionais, restritos a determinadas condições, que dependem do problema abordado.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Cálculo das Variações; Problemas Geométricos; Otimização;.

Unilab , Palmares, Discente, josemessias1409@gmail.com[1]
Unilab, Palmares, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

Este projeto empreendeu a exploração e resolução de problemas clássicos dentro da Geometria Diferencial de curvas e superfícies, empregando o Cálculo das Variações como principal instrumento analítico. Como mencionado por Barbosa (1975), o Cálculo das Variações se origina das tentativas de matemáticos ao longo dos anos de estender a teoria de máximos e mínimos do Cálculo Diferencial a funções cujo domínio fosse definido por certos conjuntos de curvas ou funções. Em sua essência, essa área concentra-se na determinação de pontos críticos e na obtenção de valores máximos ou mínimos de funcionais, todos restritos a condições específicas, em um espaço M, que pode ser um espaço de funções, espaço de curvas, entre outros, com valores resultantes em R. Tipicamente, esses funcionais são expressos como integrais que dependem de uma variável, de uma função dessa variável e de suas derivadas. Os irmãos Jacques e Johann Bernoulli desempenharam um papel fundamental no surgimento e desenvolvimento do Cálculo das Variações. Em 1696, Johann Bernoulli propôs o célebre problema da braquistócrona, que busca encontrar a curva que minimiza o tempo de queda de um objeto sob a influência exclusiva da gravidade, entre dois pontos em um plano vertical. Por sua vez, Jacques Bernoulli apresentou o problema das figuras isoperimétricas, que visa identificar uma curva simples e fechada, com perímetro fixo, capaz de maximizar a área delimitada por ela. O problema da braquistócrona inspirou vários matemáticos notáveis, incluindo Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Ehrenfried von Tschirnhaus, Guillaume de L'Hôpital e o próprio Jacques Bernoulli, a apresentarem soluções originais, todas culminando na solução em forma de cicloide.

Ao longo do desenvolvimento do Cálculo das Variações, esta área revelou-se uma poderosa ferramenta para resolver uma ampla gama de problemas geométricos, abrangendo desde o nível básico de Geometria Diferencial de curvas e superfícies até desafios de nível avançado em Geometria Riemanniana. Inúmeros problemas de interesse na Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies podem ser tratados com eficácia por meio do método do Cálculo das Variações.

Neste contexto, o presente projeto se desdobrou em duas etapas distintas, cada uma com sua respectiva metodologia e foco. A primeira fase concentrou-se na aquisição dos fundamentos teóricos da geometria diferencial aplicada a curvas e superfícies, incluindo tópicos como continuidade e a noção peculiar de "diferenciabilidade" de um funcional em conjuntos de funções. Durante esta fase, foram estabelecidas as ferramentas essenciais para a abordagem de problemas por meio do Cálculo das Variações, destacando-se o critério de Jacob, o teste de Legendre e a equação de Euler-Lagrange como os principais instrumentos utilizados para a resolução de problemas de busca por extremos.

Na segunda etapa, o projeto evoluiu para uma abordagem mais prática, que ocorreu durante o segundo semestre da bolsa de pesquisa. Durante essa fase, as reuniões semanais foram transformadas em seminários conduzidos pelo orientando, nos quais foram apresentados os resultados obtidos após semanas de estudo e aplicação das técnicas previamente adquiridas na primeira etapa. Essas apresentações englobaram a resolução de problemas clássicos de otimização na geometria, demonstrando a eficácia das técnicas do Cálculo das Variações na solução desses desafios.

METODOLOGIA

A abordagem metodológica seguida neste projeto foi bastante convencional. O bolsista estudava e pesquisava nos materiais disponíveis na literatura base do projeto e, nos encontros semanais, era apresentado os resultados ao orientador. Como mencionado anteriormente, o projeto pode ser divido em duas fases distintas: a primeira, de natureza mais teórica, e a segunda, que ocorreu durante o segundo semestre da bolsa e concentrou-se na aplicação das técnicas previamente adquiridas na primeira fase.

Como era de se esperar, cada uma dessas etapas demandou uma abordagem metodológica distinta. Durante o primeiro semestre, o processo consistiu em estudar os conteúdos dos livros e e-books que forneceram os fundamentos sobre geometria diferencial de superfícies e, posteriormente, sobre Cálculo Variacional. Nas reuniões semanais, o bolsista levava as dúvidas ao orientador, que me indicava recursos para encontrar esclarecimentos ou fornecia orientações diretas.

Na segunda fase, os encontros semanais assumiram a forma de seminários que era preparava e apresentado ao orientador. Durante esses seminários, era compartilhado os resultados de uma ou duas semanas de estudos. Em geral, essas apresentações consistiam na resolução de problemas clássicos de otimização na geometria, aplicando as técnicas aprendidas no Cálculo Variacional.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente, estabelecemos as ferramentas que seriam utilizadas para abordar problemas com técnicas do Cálculo Variacional. As principais ferramentas que empregamos foram o critério de Jacob, o teste de Legendre e a equação de Euler-Lagrange. Em geral, para resolver problemas de busca por extremos, seguimos essa sequência de métodos, que se assemelha ao processo de encontrar extremos em funções de uma única variável, passando pela análise de continuidade, teste da primeira derivada e teste da segunda derivada.

Durante a maior parte do projeto, concentramo-nos na resolução de problemas que envolviam a busca por extremos, que na maioria das situações eram mínimos. Para isso, utilizamos a equação de Euler-Lagrange, ou variações dela, dependendo da abordagem mais adequada. No entanto, como mencionado anteriormente, alguns critérios prévios precisavam ser verificados antes de aplicar essas técnicas.

Nessa última etapa, abordamos os seguintes problemas: curva que minimiza a distância entre dois pontos, nesse problema foi necessário estabelecer um funcional que nos dê distância entre os dois pontos em função de uma única variável, esse funcional conecemos desde o cálculo 1. Em seguida utilizamos a equação de Euler-Lagrange após verificar a critério de Jacob, por último usamos o teste de Legendre. Para não se estendender sem necessidade, elencarei os outros problemas que resolvemos com o mesmo método, com poucas variações equivalentes da dita equação: encontrar a superfície de revolução que minimiza a área, resolvemos também umas das versões do problema isoperimétrico, o problema da braquistócrona e tautócrona. Esses problemas envolvem a otimização em termos geométricos. Como já sabemos, para todos esses casos, podemos estabelecer funcionais em função da variável, da função e de sua derivada. Tratarei de modo mais direto, mostrando cada passo dos cálculos, na apresentação da semana universitária.

CONCLUSÕES

Este projeto mergulhou na área de Geometria Diferencial de curvas e superfícies, empregando o método do Cálculo das Variações para resolver uma série de problemas clássicos. Como parte fundamental da história matemática, o Cálculo das Variações, cujas raízes remontam aos irmãos Bernoulli e suas famosas questões da braquistócrona e das figuras isoperimétricas, tem se mostrado uma ferramenta poderosa para abordar uma ampla gama de problemas geométricos. Desde o cálculo da menor distância entre dois pontos até a busca pela superfície de área mínima, este campo oferece insights profundos e soluções elegantes.

Ao longo deo projeto é traçado um caminho metodológico que se desdobrou em duas fases distintas. Na primeira fase, concentra-se na construção dos alicerces teóricos, explorando conceitos como continuidade e diferenciabilidade de funcionais em conjuntos de funções. As ferramentas fundamentais do critério de Jacob, teste de Legendre e equação de Euler-Lagrange emergiram como nossos principais aliados na busca por extremos. A segunda fase, mais prática, viu a aplicação dessas técnicas por meio de seminários e apresentações dos resultados. Solucionar problemas clássicos de otimização na geometria, como a busca por superfícies mínimas de revolução, demonstrou a eficácia do Cálculo das Variações em ação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap) pelo financiamento da pesquisa intitulada Problemas de Geometria Diferencial com método das Variações e executada entre 01/09/2022 e 31/08/2023, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e Tecnológica (Pibiti), da Unilab.

Agradeço ao meu orientador, Rafael Diógenes, pelo convite para participar do projeto como bolsista e pela paciência nos nossos seminários que ocorreram durante a bolsa. Agradeço à Unilab pela oportunidade de participar de bolsas de Iniciação Científica, sendo um de seus estudantes. Por fim, sou grato por ser, ainda, um dos estudantes do Curso de Matemática da Unilab. Grato, também a Deus por me abrir tantas portas.

REFERÊNCIAS

-CARMO, M. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção Textos Universitários).

-CASTRO, L. O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais. 2014. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UNB, 2014.

-FATELO, J.; MARTINS-FERREIRA, N. Curvas geodésicas em superfícies, 2014. Disponível em . Acessado em 04 de maio de 2020.

-FERREIRA, J.A. Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico. Dissertação de mestrado profissional - Universidade Federal de Goiás.

-LIMA, J. Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico, 2019. -Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, UFGO, 2019.

-LIMBERGER, R. Abordagens do problema isoperimétrico. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Campinas, 2011

-RUGGIERO, R. Geodésicas em superfícies de R^3, uma introdução, III Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014. Disponível em . Acessado em 07 de maio de 2020.

-SOUSA, G.; TEXEIRA, S. Resolvendo problemas em Geometria Diferenciais com o uso do método das variações. Revista de Matemática de Ouro Preto, v. 1, p. 29-50, 2017.

-TENENBLAT, K. Introdução à Geometria Diferencial. 2ª edição revisada. São Paulo: Blucher, 2008.

ISSN: 2447-6161

ISSN: 2447-6161