CAMPOS HOMOTÉTICOS GRADIENTES SOBRE O ESPAÇO EUCLIDIANO

Luan Silva Nogueira[1]
Larissa Braga Fernandes[2]
João Francisco Da Silva Filho[3]

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo abordar os campos de vetores homotéticos (ou simplesmente, campos homotéticos) definidos sobre o espaço Euclidiano com destaque para o caso particular dos campos homotéticos gradientes, que foram estudados durante a realização de um projeto de iniciação científica. Em contexto mais amplo, campos homotéticos sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores, cuja derivada de Lie da métrica Riemanniana é um múltiplo escalar da referida métrica e como esta relação remete às homotetias, por analogia, estes campos de vetores são designados campos homotéticos. Deve-se ressaltar que a presença de campos homotéticos em um espaço Riemanniano possibilita a aquisição de informações sobre sua curvatura escalar, bem como perrmite a identificação e/ou caracterização de espaços Riemannianos munidos com determinados tipos de campos homotéticos. Como exemplo, devemos lembrar que espaços Riemannianos completos munidos com campos homotéticos gradientes não Killing são isométricos ao espaço Euclidiano. Além disso é relevante enfatizar que esses campos de vetores estabelecem conexões interessantes com outras estruturas geométricas, tais como curvas geodésicas e isometrias locais.

Palavras-chave: Campos homotéticos; Campos homotéticos gradientes; Espaço Euclidiano.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, luannogueira01234@gmail.com[1]
Universidade de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de R. Preto, Discente, larissa.fernandes1234545@gmail.com[2]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, joaofilho@unilab.edu.br[3]

INTRODUÇÃO

Os campos de vetores homotéticos (ou simplesmente, campos homotéticos) definidos sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores suaves, cuja derivada de Lie da métrica Riemanniana na sua direção corresponde a um múltiplo escalar da métrica supracitada. Nessas condições, pode-se afirmar que os campos homotéticos remetem a um importante caso particular dos campos de vetores conformes (ou simplesmente, campos conformes) que possuem como fator conforme uma função real constante (SILVA FILHO, 2016 e 2018).

Nesse contexto, tem-se como principal objetivo o estudo dos campos homotéticos definidos sobre o espaço Euclidiano, especialmente os campos homotéticos gradientes, na perspectiva de fazer uma abordagem mais elementar que a comumente encontrada na literatura, basicamente utilizando Álgebra Linear (BUENO, 2006 e LIMA, 2014) e Cálculo Vetorial (GUIDORIZZI, 2002) no espaço Euclidiano. Deve-se ainda lembrar que no espaço Euclidano encontram-se diversos exemplos de campos homotéticos gradientes, conforme verifica-se nos trabalhos de Pigola, Rimoldi e Setti (2011) e Fernandes, Silva e Silva Filho (2022).

Destaca-se ainda que em virtude do Lema de Poincaré (cf. LEE, 2002), segue que todo campo conforme fechado definido sobre espaços Riemannianos simplesmente conexos é necessariamente um campo homotético gradiente, em particular esta conclusão é válida para o espaço Euclidiano. Além disso, todo campo homotético definido sobre o espaço Euclidiano pode ser decomposto como soma de um campo homotético gradiente com um campo de Killing (cf. SILVA FILHO, 2018), que nos fornece uma caracterização dos campos homotéticos definidos sobre o espaço Euclidiano.

METODOLOGIA

Inicialmente, deve-se esclarecer que o estudo dos campos homotéticos gradientes definidos sobre o espaço Euclidiano corresponde a um dos Planos de Trabalho do Projeto de Pesquisa, intitulado por “Campos homotéticos sobre o espaço Euclidiano”. Este Plano de Trabalho foi desenvolvido, no período que inicia em setembro de 2022 e finaliza em agosto de 2023, pelos discentes Larissa Braga Fernandes nos 05 (cinco) primeiros meses e Luan Silva Nogueira nos últimos 07 (sete) meses de vigência do projeto supracitado.

No que respeito à realização das atividades, foi feita uma revisão para aquisição dos pré-requisitos necessários, correspondente ao estudo de Cálculo Diferencial, Integral e Vetorial, bem como o estudo de alguns tópicos de Álgebra Linear que contemplam espaços vetoriais, transformações lineares, produto interno e norma, seguido de uma revisão bibliográfica sobre campos homotéticos definidos sobre o espaço Euclidiano, incluindo alguns elementos de Geometria Riemanniana restritos ao espaço Euclidiano (CARMO, 2005 e PETERSEN, 1998).

Na etapa final, estudou-se especificamente os campos homotéticos definidos sobre o espaço Euclidiano, na perspectiva de caracterizá-los e descrevê-los explicitamente, primeiro em termos da sua função potencial e posteriormente em termos das componentes com relação ao referencial ortonormal canônico. Mais precisamente, foi deduzida uma conhecida expressão polinomial que descreve todas as possíveis funções potenciais de campos homotéticos definidos sobre o espaço Euclidiano (cf. PIGOLA, RIMOLDI e SETTI, 2011) e como consequência, uma expressão geral que descreve os campos homotéticos gradientes definidos no espaço Euclidiano.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Estudar os campos homotéticos nos permite obter informações sobre a curvatura escalar de espaços Riemannianos que admitem esse tipo de campo de vetores, conforme relação estabelecida no trabalho de

ISSN: 2447-6161

Obata e Yano (1970) entre um campo conforme arbitrário, seu fator conforme e a curvatura escalar do espaço Riemanniano (cf. Lema 1 em SILVA FILHO, 2018). Por outro lado, sabe-se que espaços Riemannianos completos munidos com um campo homotético gradiente não Killing são isométricos ao espaço Euclidiano, conforme verifica-se no Teorema 2 de Tashiro (1965).

Sabendo ainda da dificuldade prática de construir exemplos de campos homotéticos, estudou-se os campos homotéticos definidos sobre o espaço Euclidiano, chegando a uma conhecida descrição dos campos homotéticos gradientes a partir da sua função potencial. Basicamente, deduziu-se uma conhecida expressão polinomial que descreve as possíveis funções potenciais de campos homotéticos gradientes e a partir desta expressão, foi possível obter uma expressão explícita que descreve todos os possíveis campos homotéticos no espaço Euclidiano.

CONCLUSÕES

Diante da escassez de materiais que abordam os campos conformes restritos ao espaço Euclidiano e da dificuldade prática de construir exemplos de campos homotéticos, aplicamos conhecimentos mais elementares sobre Álgebra Linear e Cálculo Vetorial para estudar os campos homotéticos gradientes definidos no espaço Euclidiano, verificando suas principais propriedades, dentre outras informações conhecidas na literatura em contextos mais gerais que o apresentado nesse trabalho. Para além disso, o estudo dos campos homotéticos gradientes definidos no espaço Euclidiano nos permitiu ainda deduzir uma conhecida caracterização dos referidos campos de vetores a partir da função potencial. Mais precisamente, foi possível caracterizar tais campos homotéticos através de uma conhecida expressão polinomial que descreve as possíveis funções potenciais de campos homotéticos gradientes definidos sobre o espaço Euclidiano, que por sua vez, permite obter uma expressão geral que descreve os campos homotéticos gradientes definidos sobre o espaço Euclidiano em termos das funções coordenadas relativas ao referencial ortonormal canônico.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica (BICT) da FUNCAP pelo apoio financeiro concedido através de bolsas e ao Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho pela oportunidade e orientações durante o projeto.

REFERÊNCIAS

BUENO, H. P. Álgebra Linear: Um Segundo Curso. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CARMO, M. P. do Geometria Riemanniana. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).

FERNANDES, L. B., SILVA, M. B. e SILVA FILHO, J. F. Funções Complexas Holomorfas e Campos Conformes. Revista Matemática Universitária – RMU, v. 2, p. 144-165, 2022.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5. ed. vol. 3. Rio de janeiro: LTC, 2002.

LEE, J. M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer-Verlag, 2002.

LIMA, E. L. Álgebra Linear. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. Journal Differential Geometry, v. 4, p. 53-72, 1970.

PETERSEN, P. Riemannian geometry. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate Texts in mathematics, v. 171.)

PIGOLA, S., RIMOLDI, S. e SETTI, A. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons. Mathematische

Zeitschrift, 258 (2011), 347-362

SILVA FILHO, J. F. Quasi-Einstein manifolds endowedwith a parallel vector field. Monatshefte für Mathematik, v. 178, p. 01-16, 2016.

SILVA FILHO, J. F. Some Uniqueness Results for Ricci Solitons. Illinois Journal de Mathematics, v. 61, p. 399-413, 2018.

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. Transactions of the American Mathematical Society, v. 117, p. 251-275, 1965.

ISSN: 2447-6161