



## TEOREMA DE EHRENFEST

Raphael Nicolas Domingos Maia<sup>1</sup>  
Mateus Mussunda Landa<sup>2</sup>  
Igor Rochaid Oliveira Ramos<sup>3</sup>  
João Philipe Macedo Braga<sup>4</sup>

### RESUMO

A física que conhecemos é dividida em dois grandes ramos, são a física clássica e a física moderna, entretanto as equações da física moderna sobre certas condições ficam idênticas às equações da física clássica, essa condição é chamado de Limite Clássico, o teorema de Ehrenfest faz o papel do limite clássico na mecânica quântica. no caso deste trabalho iremos estudar com o formalismo do Operador Translação Dependente da Posição (PDTO) onde temos como objetivo demonstrar o teorema de Ehrenfest neste contexto. Para esse trabalho, tivemos que modificar o espaço de Hilbert, mais especificamente o produto interno, onde tivemos que acrescentar o termo com métrica dentro do produto interno de acordo com a métrica do espaço, em seguida modificamos os observáveis e as grandezas hermitianas. Por fim aplicamos a derivada em função do tempo na média do operador momento, então chegamos na seguinte conclusão, que quanto temos um espaço com uma métrica a média dos valores médios se comporta com se estivesse num referencial não-inercial.

**Palavras-chave:** Limite Clássico; Teorema de Ehrenfest; Espaço de Hilbert; Referencial Não-Inercial.

---

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira., ICEN- Instituto de Ciências Exatas e da Natureza.,  
Discente, nicolasmaia501@gmail.com<sup>1</sup>

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira., ICEN- Instituto de Ciências Exatas e da Natureza.,  
Discente, landateu@gmail.com<sup>2</sup>

Universidade Estadual do Vale do Acaraú , Depantamento de Física docente, Docente, igorrochaid@gmail.com<sup>3</sup>

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira., ICEN- Instituto de Ciências Exatas e da Natureza.,  
Docente, philipe@unilab.edu.br<sup>4</sup>



## INTRODUÇÃO

A física é dividida em dois grandes ramos, a física clássica e a física moderna, entretanto as equações da física moderna sobre certas condições ficam idênticas às equações da física clássica, essa condição é chamado de Limite Clássico, onde iremos mostrar que o valor médio dos observáveis em mecânica quântica obedece às leis da mecânica clássica.

O teorema de Ehrenfest faz o papel do limite clássico em mecânica quântica. No caso deste trabalho iremos trabalhar com o formalismo PDTO (Operador Translação Dependente da Posição que em inglês é "Position Dependent Translation Operator") onde temos com objetivo de demonstrar que o teorema de Ehrenfest estabelece o limite clássico da teoria quântica, mas para isso vamos ter que fazer algumas considerações, no caso deste trabalho a modificação será no espaço de Hilbert, onde David. J. Griffiths define como "O Conjunto de todas as funções de quadrado-integráveis, em um intervalo específico, constitui um espaço vetorial", em outras palavras, o espaço de Hilbert é o espaço onde as funções de onda existem, para o objetivo deste trabalho vamos fazer uma modificação para que o espaço de Hilbert tenha uma dependência da métrica.

O objetivo é demonstrar que quando temos uma métrica o valor médio dos observáveis se assemelha a segunda lei de Newton para uma referencial curvo.

## METODOLOGIA

Para esse trabalho teremos que modificar primeiramente o espaço de Hilbert, mais especificamente o produto interno, onde iremos trocar o elemento infinitesimal "dx" por "ds" representando o elemento infinitesimal do arco de curva, ou seja o espaço de Hilbert que iremos trabalhar depende da métrica do espaço.

Essa modificação é necessária pois para que as grandezas físicas generalizadas que dependem da métrica como o momento generalizada tenham significado físico e por consequência possa ser medidas, para que isso aconteça elas devem ser hermitianas, pois só assim eles representam grandezas que podem ser medidas, essas grandezas são chamadas de observáveis hermitiano, onde Griffiths defini como "Observáveis são representado por operadores hermitianos" desta forma o momento generalizado "ganha" sentido física neste espaço.

Para o nosso trabalho vamos usar a equação que nos fornece a taxa de variação dos valores médios dos observáveis hermitianos, essa equação tem um limite de validade que é a os observáveis e o hamiltoniano do sistema sejam hermitianos, pois isso iremos usar o espaço de Hilbert com a métrica, pois o nosso objetivo é mostra que o limite clássico da mecânica quântica no formalismo PDTO cai na Dinâmica clássica em espaço curvo.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Vamos Resolver a que nos fornece a taxa de variação dos valores médios dos observáveis hermitianos para o momento generalizado, para isso temos que saber que o comutador do momento com ele mesmo é nulo, com isso temos que o resultado desta equação é que a taxa de variação dos valores médios dos observáveis hermitianos para o momento generalizado tem como resultado menos a derivada generalizada do potencial, onde a derivada generalizada tem uma dependência com a métrica.

Esse resultado é interessante pois os valores médios neste formalismo caim exatamente na segunda lei de



Newton num referencial curvo, porém quando temos como o arco de curva com coordenada generalizada.

## CONCLUSÕES

Podemos afirmar que todos os objetivos foram alcançados pois, mostramos que quando estamos no referencial com métrica ao aplicar o limite clássico chegamos na segunda lei de Newton num referencial não-inercial, assim para os valores médios das grandezas físicas na Mecânica Quântica no formalismo PDTO cai na Mecânica Clássica em um Referencial não-inercial, em outras palavras os valores médios dos observáveis descreve uma partícula confinada em um espaço curvo.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado também gostaria de agradecer a FUNCAP que ajudou de forma financeira neste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, Quantum Mechanics, Vol.1 Hermann e John Wiley & Sons, Paris, 1977).
- [2] D. J. GRIFFITHS, Introduction to Quantum Mechanics. 2. ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2011.
- [3] J.P.M. Braga, Mecânica Quântica Não-aditiva, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação do Departamento de Física da UFC, 2015.
- [4] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. Dinâmica clássica de partículas e sistemas. 5ª Edição Norte-Americana, 2012.