



## INCERTEZA MÍNIMA NO MOMENTO

Mateus Mussunda Landa<sup>1</sup>  
Raphael Nicolas Domingos Maia<sup>2</sup>  
Igor Rochaid Oliveira Ramos<sup>3</sup>  
João Philipe Macedo Braga<sup>4</sup>

### RESUMO

Princípio da Incerteza de Heisenberg é um dos principais fundamentos da mecânica quântica, e de acordo com este princípio, em sistemas de escalas reduzidas, como nos átomos e moléculas, as grandezas relacionadas, tais como, quantidade de movimento e posição, não podem ser medidas simultaneamente com máxima precisão. No presente trabalho nos propomos a desenvolver uma demonstração mais didática para o princípio da incerteza em um espaço curvo, obtendo, a incerteza mínima no momento quando consideramos o segundo termo da expansão da série de Taylor da métrica e explorarmos as consequências físicas desses resultados, tal como o aparecimento de incerteza mínima no momentum diferente de zero. Assim, começamos explorando a métrica em espaços Euclidianos e Riemannianos, e vimos que, neste último, uma operação nestes espaços deve ser levada em conta a sua métrica. Para explorarmos o princípio da incerteza mais geral, partimos para a escolha de uma métrica de espaço mais geral, espaço Riemanniano, e expandimos a métrica em série de Taylor unidimensional até o termo de segunda ordem, e obtivemos a métrica, e com ela, obtivemos a translação nos espaços dos momentos bem como a relação de comutação entre os operadores posição e momento generalizado. Por conseguinte, exploramos a relação de incerteza entre essas grandezas e determinamos o valor da variação da posição, que minimiza o momento generalizado por intermédio de uma derivada no momento em função da posição, desta feita, por intermédio da substituição do valor da expressão da posição encontrado, foi possível determinar a expressão da variação do momento mínimo, com algumas considerações, nos fornece uma incerteza mínima no momentum real e maior que zero.

**Palavras-chave:** Incerteza mínima no Momentum; Métrica; Espaço Riemanniano.

---

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira- UNILAB, Instituto de Ciência Exatas e da Natureza-ICEN, Discente, landateu@gmail.com<sup>1</sup>

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira- UNILAB, ICEN, Discente, nicolasmaia501@gmail.com<sup>2</sup>

Universidade Estadual do Vale do Acaraú, Departamento de Física, Docente, igorrochaid@gmail.com<sup>3</sup>

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira- UNILAB, ICEN- Instituto de ciência exatas e da natureza, Docente, philipe@unilab.edu.br<sup>4</sup>



## INTRODUÇÃO

No presente trabalho, pretendemos apresentar uma demonstração mais geral para o princípio da incerteza no espaço dos momentos de maneira didática, e explorarmos consequências físicas desses resultados e os efeitos quânticos no princípio da incerteza estendido, quando levamos em consideração a métrica do espaço. Da geometria Euclidiana o espaço é considerado como contínuo e métrico[1] e de acordo com Riemann, um dos postulados da geometria nos diz que: O Quadrado da distância entre dois pontos infinitamente vizinhos é igual ao somatório do produto das coordenadas dos pontos com seus tensores métricos[1]. Agora, postulando que o espaço das posições é o espaço de Riemann unidimensional, sendo descrito de forma contínua pelo sistema de valores da coordenada  $x$  mais um  $x+dx$  será  $ds$  ao quadrado igual ao produto da métrica com o  $dx$  ao quadrado.

Bem, vamos considerar o termo quadrado da expansão em série de Taylor da métrica e vamos procurar entender quais implicações essa mudança trará para o princípio da incerteza no espaço dos momentum.[1]

## METODOLOGIA

Este estudo baseou-se em uma estratégia qualitativa de pesquisa, de caráter exploratória bibliográfica, na qual utilizamos os seguintes livros como base: Griffiths [1], Sakurai [2], Cohen-Tannoudji [3] e Mecânica quântica não-aditiva[4] onde eles apresentam discussões sobre o princípio da incerteza. A primeira atividade realizada foi o estudo do princípio da incerteza de Heisenberg[1], onde estudamos o princípio da incerteza generalizado, em seguida, buscamos compreender de maneira mais sólida este princípio tomando [2] e [3] como base, e observamos que, há na verdade para cada par de observáveis cujos operadores não comutam, um princípio da incerteza, que surge como consequência do caráter estatístico. Por conseguinte, estudamos a incerteza mínima no momento em [4] onde é apresentado uma métrica espacial em expansão de série de Taylor, e apresentado a incerteza mínima no momento; que serviu como base para elaboração deste trabalho onde nos propomos em apresentar de maneira mais didática os resultados explorados em [4].

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Assim, como base no que nos propomos a explorar nesse trabalho, obtemos os resultados obtidos partindo do seguinte: Primeiramente tomamos a série de Taylor em  $x$  na base da métrica e expandimos até o termo da segunda ordem, com os valores dos coeficientes bem definidos, escolhemos a nossa métrica até ao termo quadrado obtido pela expansão. Assim, tendo em vista que para dois observáveis quaisquer, em um estado é válida o princípio da incerteza estendido. Desta feita, tomamos este princípio para o momento generalizado e posição e escrevemos a relação de incerteza destes, assim, partindo do conceito de desvio padrão para dois observáveis quaisquer e considerando apenas a igualdade neste princípio, isolamos então a variação do momento generalizado.

Por conseguinte, precisávamos encontrar a expressão da variação da posição que minimiza a variação do momento, neste caso, tomamos, a deriva do momento em função da posição e igualamos a zero, exploramos esses resultados e encontramos a expressão para variação da posição, como sendo o valor que minimiza a variação do momento generalizado. Tendo o valor, usamos para obtermos a incerteza mínima no momento chegando então a expressão para a incerteza mínima no momento generalizado e podemos afirmar que a incerteza mínima no momentum é real e maior que zero; no caso particular em que o valor médio da posição é igual a zero, obtemos um incerteza mínima no momentum, como sendo a região que compreende os



estados que são permitidos no espaço Euclidiando quando tomamos a métrica igual a 1. mas que não são permitidos em espaços curvos, por exemplo, assim sendo, essas regiões são proibidas em um espaço que não seja métrico e contínuo.

## CONCLUSÕES

Após a exploração dos livros que tomamos como base para nosso estudo, conseguimos avançar o nosso estudo para compreensão dos efeitos físicos para o princípio da incerteza e deduzimos a expressão para a incerteza mínima no momento quando consideramos o segundo termo da expansão em série de Taylor da nossa métrica, concluímos finalmente que existe uma incerteza mínima diferente de zero no momentum. Como já apresentado em [4], entretanto, numa perspectiva que achamos mais didática para apresentação em nível de ensino de física.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Unilab pelo financiamento da pesquisa intitulada: Ensino de Mecânica Quântica por Meio do Formalismo do Operador Translação Dependente da Posição; executada entre 01/10/2022 e 30/09/2023, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e Tecnológica (Pibiti), da Unilab.

## REFERÊNCIAS

- [1] D. J. Griffiths. Mecânica quântica. 2. ed., São Paulo: Pearson, 2015.
- [4] J. P. M. Braga. Mecânica quântica não-aditiva. 2015. 64 f. tese (doutorado em física). Universidade Federal do Ceará, Ceará, 2015.
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe, Quantum Mechanics, Vol.1 (Hermann e John Wiley& Sons, Paris, 1977).
- [2] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. Mecânica quântica moderna. 2. ed. Tradução técnica: Sílvio Renato Dahmen. Porto Alegre: Bookman, 2013.