CAMPOS DE KILLING SOBRE O ESPAÇO EUCLIDIANO

Elenitha De Sousa Felix [1]
João Francisco Da Silva Filho[2]

RESUMO

O presente trabalho é fruto de um projeto de iniciação científica e versa sobre campos de Killing definidos sobre o espaço Euclidiano, que correspondem a um importante caso particular de campos homotéticos. Deve-se ressaltar que os campos homotéticos representam um caso particular dos campos de vetores conformes (ou simplesmente, campos conformes), visto que campos homotéticos são campos conformes que possuem fator conforme constante. Destaca-se que o estudo foi realizado sobre o espaço Euclidiano com o intuito de conceder uma perspectiva mais acessível, isto é, mais compreensível para o nível de Graduação, uma vem que a abordagem comumente encontrada na literatura, aborda espaços Riemannianos (ou variedades Riemannianas) em geral. Dessa maneira, a abordagem adotada no projeto, basicamente, aplicou conteúdos de Álgebra Linear juntamente com Calculo Diferencial, Integral e Vetorial, que são pré-requisitos fundamentais e indispensáveis para este estudo. Diante do exposto, tornou-se possível com os pré-requisitos supracitados, chegar a uma caracterização dos campos de Killing definidos sobre o espaço Euclidiano através de uma representação matricial.

Palavras-chave: Campo de vetores; Campo de Killing; Espaço Euclidiano.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – Unilab, Campus das Auroras, Discente, elenithasousa@gmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – Unilab , Campua das Auroras, Docente, joaofilho@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

Um campo de Killing definido sobre um espaço Riemanniano consiste de um campo de vetores suave, cuja derivada de Lie da métrica Riemanniana em sua direção é identicamente nula. Em outras palavras, pode-se afirmar que um campo de Killing é simplesmente um campo homotético que possui fator conforme identicamente nulo (CARMO, 2005 e SILVA FILHO, 2016). Observa-se ainda que os campos homotéticos correspondem a um interessante caso particular dos campos conformes, visto que campos homotéticos correspondem a campos conformes com fator conforme constante (SILVA FILHO, 2016 e FERNANDES, SILVA e SILVA FILHO 2022).

No espaço Euclidiano encontram-se diversos exemplos de campos homotéticos e campos de Killing, verifica-se, por exemplo, que todo campo conforme gradiente definido sobre o espaço Euclidiano é necessariamente homotético (PIGOLA, RIMOLDI e SETTI, 2011). Nesse espaço, verifica-se que os conceitos associados a campos de Killing tornam-se bem mais elementares, possibilitando uma abordagem mais voltada ao estudo de operadores lineares definidos no espaço Euclidiano e Cálculo Vetorial sobre o espaço Euclidiano (FERNANDES, SILVA e SILVA FILHO 2022).

Finalmente, deve-se salientar que campos de Killing definidos sobre o espaço Euclidiano podem ser relacionados com os operadores lineares anti-autoadjuntos definidos no espaço Euclidiano (BUENO, 2006, LIMA, 2014 e CARMO, 2005). De outra forma, verifica-se que campos de Killing estão diretamente relacionados a campos lineares definidos por matrizes anti-simétricas, visto que campos lineares definidos por uma matriz é um campo de Killing se, e somente se, esta matriz for anti-simétrica (CARMO, 2005). Mais geralmente, podemos ainda relacionar quaisquer campos de Killing com campos lineares supracitados e operadores lineares anti-autoadjuntos definidos no espaço Euclidiano.

METODOLOGIA

A pesquisa realizada no decorrer do projeto teve a duração de um ano, iniciando em outubro de 2022 e finalizando em setembro de 2023. Nos primeiros meses, foi feito um estudo correspondente à aquisição dos pré-requisitos necessários para a compreensão dos campos conformes e em especial, para a compreensão dos campos de Killing. Dessa forma, durante os meses de outubro de 2022 a março de 2023, foram estudados funções de várias variáveis reais a valores vetoriais, campo de vetores (ou campo vetorial), gradiente, rotacional, divergente, limites e continuidades, derivadas parciais e integrais duplas, mudança de variável, produto interno, norma, bases ortogonais e ortonormais, projeções ortogonais, adjunta de uma aplicação linear, isomerias e por fim operadores lineares.

Durante esse primeiro período, foi realizada uma revisão bibliográfica dos conteúdos anteriormente mencionados, usando livros, artigos e trabalhos de conclusão de curso, bem como contando com o acompanhamento de video-aulas e resolução de exercicios, seguindo um estudo gradativo previsto no Plano de Trabalho. Alguns conteúdos puderam ser melhor aprofundados, visto que constavam nas ementas das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral III e Introdução à Álgebra Linear, cursadas por mim no mesmo período de vigência do projeto. Nesses seis primeiros meses, foram realizadas reuniões semanais com o orientador, que auxiliaram no esclarecimento de dúvidas, possibilitaram discussões sobre o conteúdo e acompanhamento das atividades de um modo geral.

No segundo semestre do projeto, que contempla o período de abril a setembro de 2023, foram estudados os conteúdos referentes a campos conformes no espaço Euclidiano, incluindo campos de vetores, gradiente, divergente, colchetes de Lie, hessiano, derivada de Lie e campos de Killing, dentre outras importantes estruturas geométricas. Estes conteúdos foram trabalhados por meio de exposições minhas e do orientador, realização de exercícios e estudo de notas de aula fornecidas pelo orientador, uma vez que a abordagem comumente encontrada na literatura refere-se a espaços Riemannianos (ou variedades Riemannianas), praticamente inviável para ser trabalhado a nível de Graduação.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Estudar os campos homotéticos (em particular, os campos de Killing) nos permite compreender um pouco mais sobre isometrias locais, curvas geodésicas e curvatura escalar dos espaços Riemannianos nos quais estes campos de vetores estão definidos, dentre outras estruturas geométricas (CARMO, 2005, PETERSEN, 1998, TASHIRO, 1965, OBATA e YANO, 1970). No entanto, construir exemplos de campos homotéticos e campos de Killing usando diretamente as suas respectivas definições não é viável, visto que resolver a equação de Killing não costuma ser uma tarefa muito simples, devido à complexidade da expressão da derivada de Lie, mesmo tratando-se do espaço Euclidiano (FERNANDES, SILVA e SILVA FILHO 2022).
Nesse sentido, estudamos uma importante caracterização dos campos de Killing definidos sobre o espaço Euclidiano, baseada na relação desses campos de vetores com os operadores lineares e com as matrizes anti-simétricas (BUENO, 2006 e LIMA, 2014). Mais precisamente, verifica-se que campos lineares definidos por uma matriz corresponde a um campo de Killing se, e somente se, esta matriz é anti-simétrica (CARMO, 2005). Convém ressaltar que quaisquer campos de Killing definidos no espaço Euclidiano podem ser caracterizados através de campos lineares definidos por uma matriz anti-simétrica, ou equivalentemente, podem ser caracterizados através de operadores lineares anti-autoadjuntos.

CONCLUSÕES

Diante da generalidade das abordagens comumente encontradas sobre os campos de vetores conformes (ou simplesmente, campos conformes) e da dificuldade de construir exemplos de campos de Killing, utilizamos conhecimentos bem mais elementares sobre Álgebra Linear e Cálculo Diferencial, Integral e Vetorial para estudar os campos de Killing definidos sobre o espaço Euclidiano, verificando as principais propriedades desses campos de vetores, dentre outras informações válidas para espaços Riemannianos de um modo geral. Além disso, de acordo com o que foi mencionado anteriormente, o estudo nos possibilitou que a pesquisa chegasse a uma interessante caracterização, já conhecida na literatura, dos campos de Killing definidos sobre o espaço Euclidiano. Mais especificamente, podemos caracterizar tais campos de Killing por meio de uma representação matricial que permite escrevê-los em termos de campos lineares definidos por uma matriz anti-simétrica, ou equivalentemente, podemos escrever os campos de Killing definidos sobre o espaço Euclidiano em termos de operadores lineares anti-autoadjuntos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – Unilab e ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Cientifica (PIBIC) pela concessão da bolsa de iniciação científica e ao Professor Dr. João Franscisco pela orientação.

REFERÊNCIAS

BUENO, H. P. Álgebra Linear: Um Segundo Curso. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CARMO, M. P. do Geometria Riemanniana. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).

FERNANDES, L. B., SILVA, M. B. e SILVA FILHO, J. F. Funções Complexas Holomorfas e Campos Conformes. Revista Matemática Universitária – RMU, v. 2, p. 144-165, 2022.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5. ed. vol. 3. Rio de janeiro: LTC, 2002.

LIMA, E. L. Álgebra Linear. 8ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. Journal Differential Geometry, v. 4, p. 53-72, 1970.

PETERSEN, P. Riemannian geometry. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate Texts in mathematics, v. 171.)

PIGOLA, S., RIMOLDI, S. e SETTI, A. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons. Mathematische Zeitschrift, 258 (2011), 347-362

SILVA FILHO, J. F. Quasi-Einstein manifolds endowedwith a parallel vector field.Monatshefte für Mathematik, v. 178, p. 01-16, 2016.

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. Transactions of the American Mathematical Society, v. 117, p. 251-275, 1965.