PONTOS CRÍTICOS DE APLICAÇÕES DIFERENCIAIS

Matheus Maia Da Silva[1]
Joserlan Perote Da Silva[2]

RESUMO

A Teoria de Singularidades de aplicações diferenciais é uma descendente direta do Cálculo Diferencial, sendo está uma ferramenta fundamental para o estudo da física, equações diferenciais e a geometria de curvas e superfícies. Ela representa uma extensão abrangente da análise de funções em pontos de máximo e mínimo, substituindo as funções individuais por famílias de funções. O aprendizado da Teoria de Singularidades de aplicações diferencias deve inspirar o aluno bolsista a buscar novos conhecimentos, a fim de adquirir os pré-requisitos necessários e aplicar os conceitos matemáticos já adquiridos em disciplinas anteriores, como Cálculo Diferencial I e II. Esses conhecimentos são cruciais para a compreensão dos conceitos e estruturas mencionados neste projeto, além de serem essenciais para a execução das atividades propostas. Em resumo, este projeto visa promover a pesquisa com base na formação acadêmica do bolsista, aproveitando os conhecimentos prévios adquiridos em disciplinas passadas e complementando-os com disciplinas futuras, à medida que o projeto avança. Isso permitirá uma conexão entre a teoria estudada e sua aplicação prática, fazendo uso dos recursos tecnológicos disponíveis na Unilab. Dessa forma, estaremos alinhados com os princípios estabelecidos nas diretrizes da Unilab para a política de pesquisa e pós-graduação. Neste trabalho, abordaremos os conceitos introdutórios da Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis, incluindo definições e resultados fundamentais relacionados a aplicações diferenciáveis, pontos críticos dessas aplicações, interpretação geométrica e propriedades algébricas relevantes. Nosso foco estará na análise dos pontos críticos de aplicações diferenciáveis, com ênfase na classificação dos pontos críticos de funções reais.

Palavras-chave: Ponto Crítico; Lema de Morse; Classificação.

Unilab, unidade, Discente, silvamatheus@aluno.unilab.edu.br[1]
Unilab, Unidade, Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

A teoria de singularidades é uma área de estudos que é descendente direto do Cálculo Diferencial, já que, nesse estudo estuda-se os pontos onde a derivada de primeira ordem de uma função é igual a zero. O estuda mais trivial seria de f:R⟶R, nesse caso, os pontos em que a derivada de primeira ordem da função for zero teremos três opções de classificação: ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de inflexão. O trabalho foi desenvolvido focando os estudos das funções f:R^2⟶R ,onde, se tem uma função f cujo domínio é o plano, isto é, o domínio será um par ordenado (x,y). Nesse caso, os pontos críticos serão determinados quando a derivada parcial em relação a x, denotado por f_x (x,y), e a derivada parcial em relação a y, denotado por f_y (x,y) forem zero. Supondo uma função f:R^2⟶R que tem um ponto crítico u temos que fazer a análise da matriz hessiana dessa função para determinar se esse ponto é degenerado ou não degenerado. Nesse caso conseguimos classificar esse ponto via Lema de Morse. Nesse primeiro caso, em que se tem um ponto crítico não degenerado, a função terá três possibilidades: será valor de máximo local, mínimo local ou ponto de sela. Com esse lema em mãos é possível classificar os pontos críticos não degenerados. Caso o determinante da matriz hessiana seja igual a zero teremos que o ponto crítico será degenerado, logo, precisa-se recorrer a um outro resultado para classifica-lo que é chamado de Splitting Lemma enunciaremos estes lemas no decorrer deste trabalho.

METODOLOGIA

A metodologia da pesquisa foi de natureza de revisão bibliográfica. Foi executado o estudo de livros e artigos relacionados ao Cálculo Diferencial, Análise na Reta e da Teoria das Singularidades. Inicialmente foi feira uma revisão da literatura de livros para fornecer os pré-requisitos básicos para a compreensão da Teoria de Singularidades de Aplicações Diferenciáveis, posteriormente, foi executado o estudo de artigos, indicados pelo orientador, no intuito de promover a familiarização do aluno com a teoria de singularidades e suas aplicações. Também houveram encontros semanais com o orientador a fim de esclarecer dúvidas e para exposições de novos conteúdos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Durante a pesquisa foi discutido os pontos críticos de funções f:R^2⟶R buscando classificar esses pontos e entender o que acontece com a função nesses pontos dependendo do valor do determinante da matriz hessiana. Chegou-se que o ponto crítico pode ser não degenerado ou degenerado, e isso vai depender da matriz hessiana, dada pelos derivadas de segunda ordem. Desta forma, conseguiu-se classificar os pontos críticos quando o determiante da matriz hessiana é diferente de zero via lema de Morse. Esse lema diz que sendo f:R^n⟶R, o Lema de Morse diz que consegue-se uma vizinhança U do ponto crítico u onde existe uma mudança de coordenadas dada por ψ:U⟶R^n tal que se consegue uma composição tal que f∘ψ:U⟶R onde (f∘ψ)(u)=f(u)-y_1^2-y_2^2-…-y_l^2+y_l+y_(l+1)^2+□+y_n^2 para y=(y_1,y_2,…,y_n) pertence a U e 1≤l≤n. Quando o determinante da matriz hessiana for igual a zero, tem-se um ponto degenerado, dessa forma não é possivel classificar esse ponto via Lema de Morse, neste caso, classificamos via Splitting Lemma. Desta forma, os pontos críticos serão dados quando as derivadas de primeira ordem em relação a x e y aplicadas em um ponto serão zero. Seja f_x (x_0,y_0) e f_y (x_0,y_0) as derivadas parciais em relação a x e y, respectivamente, e u=(x_0,y_0) um ponto que pertence a f, u será ponto crítico de f se, e somente se, f_x (x_0,y_0)=0 e f_y (x_0,y_0)=0. Seja u um ponto crítico de f ele será ponto de máximo, mínimo ou sela se u for

ISSN: 2447-6161

ponto crítico não degenerado. Supondo uma função $f:R^2 \longrightarrow R$ que tem um ponto crítico u temos que fazer a análise da matriz hessiana dessa função para determinar de esse ponto é degenerado ou não degenerado. Quando o determinante da matriz hessiana de f dado por: $(f_{xx}(x,y)*f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)*f_{yx}(x,y)$ é diferente de zero, temos um ponto crítico não degenerado. Suponha, agora, que $u=(0,0)$ é ponto crítico não degenerado, assim, desenvolvendo a função em série de Taylor, tem-se $f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+1/2! [f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)) (y-y_0)^2]+g(x,y)$, onde $g(x,y)$ é o desenvolvimen-to da série de Taylor para as ordens superiores. Sendo u ponto crítico as derivadas de primeira ordem são zero, logo $f(x,y)=f(x_0,y_0)+1/2 [f_{xx}(x_0,y_0)x^2+2f_{xy}(x_0,y_0)xy+f_{yy}(x_0,y_0)y^2]+g(x,y)$ sendo $f_{xx}(x_0,y_0)=a, f_{xy}(x_0,y_0)=b, f_{yy}(x_0,y_0)=c$ tem-se $f(x,y)=f(x_0,y_0)+1/2 (ax^2+2bxy+cy^2)+g(x,y)$ note que em (0, 0) tem-se $g(x,y)=(0,0)$, e as demais derivadas de g de primeira e segunda ordem também são zero. Note que a parte quadrada de f, com $a\neq 0$, fica $a(x+b/a\ y)+y^2 (c-b^2/a)$ conseguimos uma mudança de variável $\psi \circ x,y) \rightarrow (X,Y)$ com $X^2=a(x+b/a\ y)$ e $Y^2=y^2 (c-b^2/a)$ tais que existe um difeomorfismo local na vizinhança de (0, 0) tal que $f\circ\psi(u)=d\pm X^2 \pm Y^2$, com $d=f(0,0)$. Desta forma, conseguimos classificar os pontos críticos não degenerados. Se $f(x\ y)=d+X^2+Y^2$ teremos índice 0, logo será ponto de mínimo local. Se $f(x,y)=d+X^2-Y^2$ teremos índice 1, logo será ponto de sela. Se $f(x,y)=d-X^2-Y^2$ tem-se índice 2, logo será ponto de máximo local, note que o índice é determinado pelo número de vezes que aparece o sinal negativo, é desta forma que se classifica os pontos críticos não degenerados. Um dos problemas centrais na Teoria de Singularidades é classificar funções segundo R-equivalência. Um exemplo disto já foi feito no Lema de Morse, onde uma função f definida em uma vizinhança de um ponto crítico não degenerado é R-equivalente à função g dada por $g=-y_2^2-\ldots-y_l^2+y_{(l+1)}^2+\cdots+y_n^2$. Com o seguinte teorema, sabe-se que seja $f:R \longrightarrow R$ uma função de classe C^∞ tal que $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{((k-1))}(0)=0$ mas $f^{((k))}\neq 0$. Então existe uma mudança de coordenadas sob a qual f toma a forma , se é ímpar, e x^k ou $-x^k$, se k é par. Note que este teorema diz que uma função $f:R \longrightarrow R$ com série de taylor não nula é equivalente a $\pm x^2$ para algum k. Como existe o Lema de Morse para pontos críticos não degenerados, também se tem um resultado para os pontos críticos degenerados, que permite encontrar formas normais para uma função em uma vizinhança de tal ponto em dimensões maiores que 1. Este resultado é conhecido como Splitting lemma e é enunciado a seguir. Seja uma função $f:R^n \longrightarrow R$ de classe C^∞, com derivadas parciais de primeira ordem iguais a zero na origem e cuja matriz Hessiana na origem tem posto r. Então f é R -equivalente, na origem, a uma função da forma $\pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_r^2+g(x_{(y+l)},\ldots,x_n)$, onde $g:R^{(n-r)} \longrightarrow R$ é uma função de classe C^∞.

CONCLUSÕES

A pesquisa investigou o que são pontos críticos de funções reais em funções do tipo $f:R \longrightarrow R$ e principalmente em funções de $f:R^2 \longrightarrow R$ e chegou-se as suas classificações. Checou-se que os pontos críticos não degenerados em $f:R^2 \longrightarrow R$ são pontos de mínimo, máximo ou de sela, tal que, a técnica usada no para $f:R^2 \longrightarrow R$ foi o Lema de Morse. E que em $f:R \longrightarrow R$ tem-se ponto de máximo local, mínimo local e ponto de inflexão e para este caso fiz-se a analise com as vizinhanças do ponto, já que, para esses casos, a analise é mais simples de ser feita. E também estudou-se os pontos críticos isolados, ou degenerados, tal que a técnica utilizada para este estudo foi o splitting lemma, onde eles são classificados por: umbílico elípitico, umbílico hiperbólico e umbílico parabólico.

AGRADECIMENTOS

ISSN: 2447-6161

Nesse momento se faz necessário se fazer alguns agradecimentos por parte do bolsista a fim de se mostrar agradecido quanto a alguns elementos fundamentais no processo. Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, porque, sem ele nada posso fazer e tudo o que tenho é graças a sua misericórdia. Quero agradecer também ao professor-orientador Joserlan Perote pela oportunidade e confiança que me foi depositada. Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da pesquisa intitulada Pontos Críticos de Aplicações Diferenciais e executada entre 01/09/2022 e 31/08,2023, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) e tecnológica (PIBITI) da Unilab, isso faz com que, possamos nos dedicar melhor ao curso enquanto podemos estudar conteúdos que vão além das fronteiras da graduação. Gostaria também de agradecer a Unilab por ser a universidade em que curso minha graduação e por isso pude ter a oportunidade de receber esta bolsa.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 1, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 2, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 3, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

APOSTOL, Tom M. Cálculo. Rio de Janeiro: Editora Reverté, 1979.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

Tenenblat, Keti; Introdução à Geometria Diferencial; Editora Universidade de Brasília; 1988.

Saunders, P.T.; An Introduction to Catastrophe Theory; Cambridge University Press; 1980.

V.I. Arnol'd, A. Varchenko & S. Gusein-Zade, Singularities of differentiable maps. Vol. I, Monographs in Mathematics, 82, Birkhäuser, 1985.

EBELING, Wolfgang. Functions os several complex variable and their singularities. Tradução de Philip Spain. Providence: American Mathematical Society, 1992. Tradução de: Funktionentheorie, dierentialtopologie and singularitäten.

DIMCA, Alexandru. Singularities and topology of hypersurfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.

J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.

Bruce, J. W; Giblin, P. J. Curves and Singularities, second edition, Cambridge University Press, 1992.

Gibson, C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Pitman, 1979.

C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map germs, Bull. London Math. Soc. 13, (1981), 481– 539.

MILNOR, John. Singular points of complex hypersurfaces. Princeton: Princeton University Press, 1968.

H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374–410.

J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.