CLASSIFICAÇÃO DE GERMES DE APLICAÇÕES DO R^2 EM R^2 DE CODIMENSÃO BAIXA

Julio Gomes[1]
Joserlan Perote Da Silva[2]

RESUMO

A teoria de singularidade se coloca naturalmente no estudo das funções reais a uma variável (no curso de cálculo I), onde é visto como descrever estas funções partir dos seus pontos críticos, que são aqueles onde a primeira derivada se anula. Este trabalho é parte do projeto iniciação cientifica PIBIC-Af/Unilab que tem por objetivo dar uma base solida para que o aluno bolsista possa conhecer o conceito de singularidade de aplicações diferenciáveis a partir do conceito de cálculo diferencial estudado no curso de licenciatura em matemática. Os trabalhos foram feitos em duas etapas (1° e 2° semestre) entre outubro de 2022 a setembro de 2023. No primeiro semestre do projeto houve encontros semanais entre o aluno-autor e orientador, onde foram revisados os conceitos de cálculo diferencial e no segundo semestre, teve continuação dos encontros semanais e discussão dos trabalhos de formas normais das singularidades das funções reais usando o resultado de Whitney. Nos assuntos trabalhados no projeto destacamos: a classificação das singularidades que aparecem em germes com codimensão baixa e singularidades de germes de codimensão menor ou igual a dois em E2,2. Concluímos que é possível perceber a importância de estudar estas funções reais em relação a uma variável no cálculo 1 do nosso curso.

Palavras-chave: Teoria de Singularidades; Aplicações diferenciáveis; classificação de singularidades; Formas normais das singularidades.

Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática , Discente, julioanto85nio@gmail.com[1]
ICEN, Matemática , Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

A teoria de singularidade se coloca naturalmente no estudo de funções reais a uma variável no curso de cálculo 1, onde é visto como descrever estas funções partir dos seus pontos críticos, são pontos onde a primeira derivada se anula. No estudo de aplicações f: U → R, onde U é um aberto de R e f é de classe C, este conceito aparece naturalmente e dizemos que um ponto x ∈ U é um ponto crítico de f se a sua matriz das derivadas parciais calculadas no ponto x não tem posto máximo. Que foi exatamente objetivo inicial da teoria de singularidades, estudar estes pontos críticos e as suas imagens por f, que nós chamamos de singularidades de f.

Como cada área tem sua noção natural de relação de equivalência e um dos nossos objetivos aqui é listar seus objetos a menos desta equivalência. No caso de aplicações de classe C^∞ definidas em abertos de R^n com valores em R^p, a relação de equivalência natural consiste em mudanças de coordenadas locais (difeomorfismos locais) na fonte e meta. Assim, classificar singularidades é obter as classes de equivalência segundo esta relação. Podemos entender esta classificação como uma continuação natural do estudo de cálculo em várias variáveis, onde os resultados finais nos levam às formas normais (locais) das singularidades das funções reais no plano do plano, usando o resultado de Whitney para que possamos mostrar quais são possíveis singularidades que aparecem nos germes com codimensão baixa e fazer uma lista completa de singularidade assim como apresentar as singularidades em germes de codimensão menor ou igual a dois.

Então os assuntos trabalhados no decorrer do projeto foram basicamente os citados a cima. Baseado no resultado de Whitney pioneiro em singularidade tendo intenção de determinar quais das singularidades que aparecem em germes com codimensão baixa e obter uma lista de singularidades simples. Neste caso, a questão mais natural que se coloca é determinar uma forma normal (local) descrevendo cada tipo de singularidade da aplicação.

Este trabalho é parte do projeto de iniciação científica PIBIC-Af/Unilab que tem por objetivo dar uma base sólida para que o aluno bolsista possa conhecer melhor o conceito de singularidade de aplicações diferenciáveis a partir do conceito diferencial estudado no seu curso de licenciatura em matemática.

METODOLOGIA

Os trabalhos foram realizados em duas etapas (1° e 2° semestre) durante a vigência do projeto de pesquisa que decorreu entre outubro de 2022 a setembro de 2023. Em primeiro semestre do projeto houve encontros semanais entre o aluno-autor e o orientador onde foram discutidos os conceitos de cálculo diferencial que é uma ferramenta importante no estudo de Teoria de Singularidade. Também houve momentos de aprendizagem e familiarização com softwares Mathematica e editores do formato LáteX para que o aluno-bolsista possa escrever seus resumos e relatórios ao padrão cientifico.

Por fim no segundo semestre, houve continuação dos encontrs semanais e discussão dos trabalhos de forma normais das singularidades das funções reais, usando o resultado de Whitney para que fosse mostrado as possíveis singularidades que aparecem em uma aplicação estável no plano do plano. Assim como listar a classificação das singularidades que encontremos em germes com codimensão baixa.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os assuntos trabalhados no decorrer no projeto, foram: A classificação dos germes de função que se realiza ao determinar um representante para cada classe de equivalência e essas classes são determinadas a menos de mudança de coordenadasna na fonte e na meta ou deja A-equivalência. Baseado no resultado de Whitney pode se determinar quais das singularidades que aparecem em germes com codimensão baixa e obter uma lista de singularidades simples. Primeiramente inicia se com germe de aplicação estável no plano do plano. O

ISSN: 2447-6161

resultado leva a pensar que numa curva singular de qualquer aplicação estável só pode ser encontrada cúspides e dobras transversais como singularidades isoladas. Com isso começa se com germe de coposto zero ou germes mais simples de aplicação do plano no plano que preserva origem, por exemplo F(x,y)=(x,y). Note que este germe não tem simgularidade na origem. Na base desse resultado, prossegue se com germes de coposto um, onde a mudança de coordenadas, pode ser escrita da seguinte forma: F(x,y)=(x,f(x,y)). Agora pode se começar com germes de grau no máximo 2 ou simplesmente J^2(2.2). Desta forma, tem-se o primeiro resultado.

Qualquer germe de coposto um em J^2(2,2) é A-equivalente a um dos sequintes germes: (x,y^2); (x,xy) ou (x.0). Para demonstrar este resultado, tome F(x,y)=(x,ax + bx^2 + cxy + dy^2) note que tomamos f(x,y)=(ax +bx^2 + cxy +dy^2). Para eliminar o termo puro x, nesse sentido podemos fazer a mudança da meta: tome k'(u,v)=(u,v-au) com isso podemos ter F_1=k'o F= F(k'(u,v))= F(x,y-ax)=(x, ax + bx^2 + cx(y-ax) + d(y-ax)^2)=(x,bx^2 + cxy + dy^2).

De novo faça d diferente de zero tome fonte h'(x,y)=(x,y-c/d x) e tome F_2=F_1 o h, fazemos o mesmo cálculo obtemos F_2=(x, Ax^2 + By^2). Em seguida podemos fazer uma mudança de coordenadas na meta k"(u,v)=(u,v-Au^2) se fizermos cálculo, podemos encontrar F_3=k"o F_2=(x,dy^2). O que nos leva a mostrar facilmente que F_3 é A-equivalente a (x,y^2). Mas se d=0 e c diferente de zero, então a nossa mudança de fonte (x,y) → (x,bx + cy) nos leva para o germe (x,xy). E se d=c=0 fica F é A-equivalente (x,0).

Com isso pode se seguir com estudo de A-órbitas nos germes de grau maio. A questão que pode ter na cabeça é descobrir um representante para as A-órbitas com 2-jato (x,y^2) de todos os germes de coposto 1? Com isso pode escrever uma forma que pode nos ajudar na combinação (x, y^2 + ∑a_ijx^iy^j) com i + j ≥ 3.

Agora tome germes com 2-jatos (x,xy) e escrever na forma (x, xy + ∑a_ijx^iy^j) com i + j ≥ 3. Ao decompormos os termos divisíveis por x na segunda coordenada do germe, a fatoração deste com o difeomorfismo na fonte (x,y) → (x, x + y + ∑a_ijx^(i-1)y^j) elimina todos os germes da segunda coordenada, exceto o termo xy. Então acaba ficando (x,xy + ∑a_iy^j).

Fazendo o cálculo de condimensão ≤ 2 e 2-jatos (x,xy), mas não vai ser mostrado aqui, pois é um processo muito longo, mas é muito legal o cálculo de codimensão em E2,2. Por isso só vai ser falado os nomes e contado o número de codimensão de cada germe.

i) (x, xy + y^3) chamamos de Cúspide e tem codimensão zero.

ii) (x, xy + y^4) chamamos de Rabo de andorinha e tem codimensão 1.

iii) (x, xy +y^5 + y^7) chamamos de borboleta, de codimensão 2.

Demonstrando o item i) e deixando os outros germes para o leitor pensar no assunto, pois é muito legal demonstração assim como o cálculo de codimensão. Nesse item, tome o a ≠ 0 no germe (x, xy + ∑a_iy^j) com i ≥ 3, vamos ter um germe equivalente (x, xy + y^3).

Por último falando da classificação das A-órbitas com 2-jatos (x,0) em J^3(2,2) são: (x, y^3 + x^2y); (x,xy^2) e o próprio germe (x,0). Não será feito demonstração completa aqui, um tópico de como pegar. Tome o germe em J^3(2,2) de coposto um com 2-jato e escreve na antiga forma que temos em cima que é (x, ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3). Note que se tomarmos d ≠ 0 e fizermos a mudança de coordenadas na meta (u,v) → (u,v – au^3) e mudarmos também na fonte (x,y) → (x,y-c/dx^2y), assim podemos encontrar o germe (x,3bd – c^2/dx^2y).

CONCLUSÕES

Em fim, foi possível perceber a importância de estudar as funções reais em relação a uma variável no cálculo 1, onde é visto a descrição destas funções a partir dos seus pontos críticos, onde a primeira derivada será nula, assim como estudo de aplicações

ISSN: 2447-6161

f: U → R^p, onde U é um intervalo aberto de R^p e f é classe C^∞, dizemos que x∈U é um ponto crítico de f, se a sua matriz das derivadas parciais nesses pontos x não tem posto máximo. Então, pontos críticos assim como as suas imagens foram relavantes no estudo de Teoria de Singularidade. Por fim, foi estudado germes com 2-jatos assim como cálculo de codimensão de f em E2,2 baseado no resultado de Whitney no plano do plano, com ajuda na interpretação do professor orientador Joserlan Perote da Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço PIBIC-Af/Unilab por oportunidade que me deram de entrar na bolsa de Iniciação Científica e por financiar a bolsa. UNILAB, pela oportunidade que me deu ao longo desse tempo e da nova face da carreira que me fez adquirir agradeço bastante. Ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela oportunidade de me convidar e pelas excelentes orientações que tivemos e teremos ainda, agradeço muito, no fundo do meu coração.

Aos professores da licenciatura em matemática, agradeço pelo aquilo que aprendi com vocês para aplicar no projeto de Iniciação Científica.

Aos colegas da turma pela partilha e discussão do conteúdo

REFERÊNCIAS

[1] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 1, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[2] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 2, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[3] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 3, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[4] APOSTOL, Tom M. Cálculo. Rio de Janeiro: Editora Reverté, 1979.
[5] LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
[6] LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
[7] Tenenblat, Keti; Introdução à Geometria Diferencial; Editora Universidade de Brasília, 1988.
[8] Saunders, P.T.; An Introduction to Catastrophe Theory; Cambridge University Press; 1980
[9] V.I. Arnol'd, A. Varchenko & S. Gusein-Zade, Singularities of differentiable maps. Vol. I, Monographs in Mathematics, 82, Birkhäuser, 1985
[10] EBELING, Wolfgang. Functions os several complex variable and their singularities. Tradução de Philip Spain. Providence: American Mathematical Society, 1992. Tradução de: Funktionentheorie, dierentialtopologie and singularitäten
[11] DIMCA, Alexandru. Singularities and topology of hypersurfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.
[12] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.
[13] Bruce, J. W; Giblin, P. J. Curves and Singularities, second edition, Cambridge University Press, 1992.
[14] Gibson, C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Pitman, 1979.
[15] C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map germs, Bull. London Math. Soc. 13, (1981), 481–539
[16] MILNOR, John. Singular points of complex hypersurfaces. Princeton: Princeton University Press, 1968.
[17] H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. Of Math. (2) 62 (1955), 374–410.
[18] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.

ISSN: 2447-6161