



## SISTEMA MASSA-MOLA E SUAS PROPRIEDADES: UM ESTUDO ANALÍTICO VIA ÁLGEBRA LINEAR.

Paulo Cesar Ferreira Viana<sup>1</sup>  
Wesley Marinho Lozório<sup>2</sup>

### RESUMO

Mediante as inúmeras aplicações do movimento harmônico simples, o presente trabalho tem a pretensão de avaliar, de forma individual, o sistema massa-mola, conceituando e caracterizando-o de forma explícita através da modelagem matemática que assume papel preponderante na exibição de suas equações. Para isso, recorremos ao uso das equações diferenciais, chegando a uma função que descreva este sistema. Utilizamos também conceitos oriundos da álgebra linear, como os conceitos de autovalor e autovetor. Dessa forma, modelamos e resolvemos o problema do oscilador harmônico simples, utilizando-se conceitos da álgebra abstrata e um pouco de cálculo avançado, de maneira que o leitor já traga consigo alguma familiaridade com os mesmos, para que possa aproveitar melhor a leitura. Apresentamos teoremas que garantem tanto a existência, quanto a unicidade das soluções dos sistemas de equações diferenciais usadas na modelagem. Além disso, mostramos os principais fatos sobre a estrutura das soluções de tais sistemas. Exibimos também as soluções de sistemas lineares de equações diferenciais homogêneas com coeficientes constantes, fazendo a generalização das soluções por exponenciais de matrizes. Apresentamos a solução e na sequência damos a classificação de tais soluções para alguns casos de acordo com o tipo de autovalor. Assim sendo, fizemos o estudo para o oscilador livre de amortecimento, para o oscilador amortecido e para o oscilador subamortecido, etc.

**Palavras-chave:** Álgebra; Oscilador; Sistema de equações diferenciais; Autovalor.

---

UNILAB, Campus das Auroras, Discente, paulocesarferreira266@gmail.com<sup>1</sup>  
UNILAB, Campus das Auroras, Docente, wmlozorio@unilab.edu.br<sup>2</sup>



## INTRODUÇÃO

As vibrações mecânicas são conhecidas pela humanidade há bastante tempo. Instrumentos rudimentares, como apitos e tambores, têm em seu princípio de funcionamento um problema vibratório como essência. Entre esses movimentos vibratórios, o objetivo deste trabalho será o estudo aprofundado do MHS (movimento harmônico simples). O estudo do MHS tem sua importância centrada em duas grandes razões: primeiramente, o fato de o MHS ser um movimento muito comum, presente com frequência no cotidiano, aparecendo, por exemplo, em gangorras, molas, pêndulos, etc. Em segundo lugar, o fato de que o estudo do MHS representa um dos melhores exemplos das aplicações das leis da mecânica. Nesse contexto, temos de forma muito clara um dos problemas centrais da mecânica, que é o de determinar a posição de uma partícula quando forças agem sobre a mesma. O objetivo deste trabalho é modelar e resolver o problema do oscilador harmônico simples no caso em que o sistema possui apenas uma mola, estudando todos os casos possíveis para este sistema. A importância desse estudo se dá também pelo fato de mostrar a matemática presente embasando tal estudo, pois muitas vezes é visto superficialmente na disciplina de física no ensino médio. Dessa forma, deixa-se de oportunizar a este público a beleza e a criatividade que a matemática traz consigo.

## METODOLOGIA

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos, sendo o primeiro capítulo uma breve introdução. No segundo capítulo, é feita uma revisão enfocando temas ligados à álgebra linear, utilizando como base Araujo (2017), Lima (2014) e Steinbruch e Winterle (1987). No terceiro capítulo abordamos as características e aspectos físicos do MHS, salientando principalmente a importância de tal estudo, trazendo alguma definição inerente ao tema a partir de Halliday, Resnick e Walker (2014) e Nussenzveig (2013). Por fim, foi feita a modelagem matemática do MHS, de forma introdutória visando o capítulo seguinte. Já no capítulo quatro foi feita a modelagem e resolução do sistema massa-mola, fornecendo suas principais expressões, utilizando conceitos previamente estudados, generalizando suas soluções, utilizando para tal, equações diferenciais, sistemas de equações diferenciais, etc. Estudando os principais tipos de amortecimento a saber, não amortecido, amortecido, subamortecido. Na sequência, tem-se o capítulo em que são apresentadas as considerações finais, fornecendo e destacando o comportamento do sistema massa-mola em seus vários casos estudados, mostrando tendências do MHS ao longo do tempo, ou seja, enfatizando o que ocorre em cada caso estudado.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir das considerações feitas ao longo do texto e a análise minuciosa das equações encontradas, verifica-se a existência de dois tipos de oscilações, a saber: oscilações livres com e sem amortecimento e as oscilações forçadas, esta última ocorrendo quando o sistema for afetado por uma força externa, caso este não explorado aqui. Nas oscilações livres, foram encontrados os movimentos oscilatórios não amortecido, subamortecido e superamortecido. O estudo apontou também a existência do movimento oscilatório subamortecido sendo este afetado por alguma forma de resistência que fará com que a amplitude diminua gradualmente até parar, mantendo-se sua periodicidade, ainda assim o movimento ocorre indefinidamente. A resistência observada aqui pode ser causada por forças de atrito, resistência do ar ou qualquer outra força que atue para diminuir a energia do sistema.



## CONCLUSÕES

Observou-se com este estudo o quanto a matemática foi importante para a obtenção e compreensão das equações, encontrando ao longo do texto, assuntos como: matrizes, trigonometria, determinantes, que se encaixavam e tiveram sua relevância no embasamento matemático a nível de ensino médio, sendo complementado em seguida com o uso de uma matemática mais robusta, utilizando-se das equações diferenciais e da álgebra linear, sendo determinante para a consecução deste trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus professores e colegas que me acompanharam nesta jornada de mestrado UNILAB, e muito colaboraram para o aumento de meu conhecimento. Expresso agradecimento especial ao meu professor e orientador Wesley Marinho Lozório, o qual esteve ao meu lado nesse processo. Agradeço a todos os membros da banca examinadora, pelas excelentes contribuições a este trabalho.

## REFERÊNCIAS

- ARAUJO, Thelmo de. Álgebra Linear: Teorias e Aplicações. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos da física - volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2014.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de física básica - volume 1: mecânica. 5. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2013.
- LIMA, Elon Lages. Álgebra linear. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Álgebra linear. São Paulo: Editora McGrawhill, 1987.