INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS: TEORIA E APLICAÇÃO

Janaina, G. F. S.[1]
Joserlan, P. S.[2]

RESUMO

O presente trabalho é o resultado da participação no projeto de iniciação científica promovido pelo Programa de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB) edital 04/2021, cujo título é "Introdução ao estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis: teoria e aplicação" perante a orientação do Prof. Joserlan Perote da Silva vinculado ao curso de Licenciatura em Matemática. De um modo geral, o estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis busca realizar uma análise do conjunto imagem dos pontos críticos de uma família de funções, cujo objetivo é obter uma classificação das singularidades que surgem em aplicações diferenciáveis. A classificação se dá a partir da escolha de um representante para cada família de funções, denominada germes de funções, e assim realizar um estudo da sua classe de equivalência e assim classificar os germes. Neste trabalho, apresentaremos os elementos iniciais das Singularidades de aplicações diferenciáveis, as definições e resultados básicos, tais como, Transversalidade e estabilidade, Ações de grupo e órbitas, Germes de aplicações do R^n na reta, Transversal Completa e Germes simples. Além disso, iremos descrever as singularidades em funções com singularidade isolada com codimensão menor ou igual a cinco.

Palavras-chave: Singularidade; Transversalidade; Germes Simples; Aplicações do R^n na Reta.

Unilab, ICEN, Discente, janainagomesferreira15@gmail.com[1]
Unilab, ICEN, Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

De um modo geral, o estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis busca realizar uma análise do conjunto imagem dos pontos críticos de uma família de funções, cujo objetivo é obter uma classificação das singularidades que surgem em aplicações diferenciáveis, onde algumas das ferramentas utilizadas são conhecimentos Matemáticos, já adquiridos em sala de aula nas disciplinas cursadas, tais como, Cálculo Diferencial e Integral I, II e III.

Nosso objetivo é usarmos os resultados e definições de Variedades e Transversalidade entre subvariedades para estudar a singularidade de aplicações diferenciáveis e classificá-las de acordo com sua classe de equivalência. Neste caso as funções de aplicações suaves são substituídas por famílias de funções, denominadas germes de funções, onde é feito uma escolha de um representante, e assim realizar um estudo, com a finalidade de classificar os germes.

METODOLOGIA

Durante o desenvolvimento do projeto foram realizadas as atividades previstas no plano de trabalho, bem como, a revisão bibliográfica com o objetivo de familiarizar o bolsista com conceitos e definições vistas na Teoria de Singularidades. Além disso, foi realizado um estudo sobre aplicações suaves e suas formas locais, no intuito de definir o conceito de variedades e seu espaço tangente. Dessa forma foi possível trabalhar a transversalidade entre subvariedades, valores regulares e pontos críticos de uma variedade.

Posteriormente dando continuidade foi visto o conceito de germes de aplicações, que é definido a partir de uma relação de equivalência. Dado duas aplicações suaves $f_1:U_1\to P$ e $f_2:U_2\to P$ elas serão equivalentes (f1 ~ f2) quando existir uma vizinhança $U \subset U_1 \cap U_2$ de x em N tal que as restrições $f_1|_U$ e $f_2|_U$ coincidem. As classes de equivalência dessa relação são chamadas de germes de aplicações em x e um elemento da classe de equivalência é um representante do germe. O conceito de jatos e a transversalidade de Thom com a finalidade de mostrar que a transversalidade entre aplicações e variedades ocorre em geral.

Definição de Jatos: O espaço dos k-jatos $J^k(n,p)$ é o espaço vetorial real das aplicações polinomiais g de R^n em R^p de grau $\leq$k com g(

0)=0.

Teorema (Transversalidade de Thom): Sejam $Q_1, \ldots, Q_p$ subvariedades suaves em $J^k(n, p)$. Então o conjunto de todas as aplicações suaves $f:R^n \to R^p$ tal que $j^k(f):Rn \to J^k(n, p)$ é transversal a todos os Qi é denso em $C^\infty(R^n, R^p)$.

O principal objetivo do Teorema de Transversalidade de Thom é mostrar que para um conjunto denso de aplicações suaves f : Rn → Rp do conjunto singular Σ(f) pode ser particionado em um número finito de subconjuntos $\Sigma^i(f)$, onde f tem posto constante em cada subconjunto $\Sigma^i(f)$. Posteriormente foi estudado ações de grupos e órbitas, equivalência entre jatos, codimensão e estabilidade das órbitas, e finalmente a Álgebra no n, o conjunto das aplicações de classe C^∞ tal que f: $(R^n, 0) \to R$. Com a finalidade que determinar a

ISSN: 2447-6161

classificação de germes no n, de acordo com a codimensão do seu representante para cada classe de R-equivalência. Neste caso, estudamos o germes com singularidade isolada com codimensão menor ou igual a cinco.

Definição de R-equivalência: Dois germes f e g: $(R^n,0) \to (R^n,0)$ em E_n são R-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo h:Rn,0→ Rn,0 tal que $f=g\circ h$.

Definição de codimensão: Dado um germe f ϵ n, a codimensão de f será a dimensão de E_n / J(f).

Sendo J(f) um ideal em n gerado pelas derivadas parciais de f. E por fim, com o uso dessas ferramentas conceituais obter as classificações dos germes no n.

Por fim, ressalto que durante a vigência do projeto foram realizados encontros semanais com o orientador, virtualmente pelo Google Meet, e posteriormente com a volta às aulas presenciais foi possível realizar encontros semanais, no qual o momento era utilizado para discussões sobre as definições e demonstrações dos resultados encontrados durante o estudo/pesquisa. Além disso, para a realização da digitação de alguns trabalhos foi utilizado o látex, o qual também foi feito estudos e pesquisas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir dos conhecimentos pré-adquiridos e uma análise das definições da Álgebra no n, foi possível trabalhar as definições e resultados básicos da singularidade de aplicações diferenciáveis, falando do grupo R e seu espaço tangente, singularidade isolada, codimensão finita e a determinação finita. Com isso chegamos ao resultado que classifica os germes pertencentes ao E_n, com singularidade isolada na origem e codimensão menor ou igual a cinco, que é enunciado da seguinte forma:

Proposição (R.Thom): Para um germe f pertencente m_n^2 de coposto 1 e codimensão menor ou igual a 5, a menos de uma soma de uma forma quadrática não degenerada em n - 1 variáveis, f é equivalente a um dos seguintes germes:

(i) x^3, se cod f = 2, dobra,

(ii) x^4, se cod f = 3, cúspide,

(iii) x^5, se cod f = 4, rabo de andorinha,

(iv) x^6 , se cod f = 5, borboleta.

E para completar a lista ainda vamos ter as classificações dos germes de coposto 2

Proposição (R.Thom): Todo germe f pertencente m_n^2 de coposto 2 e codimensão menor ou igual a 5 é equivalente, a menos da soma de uma forma não degenerada em n-2 variáveis, a um dos seguintes germes:

1. $x^3 - xy^2$ (umbílico eliptico),
2. $x^3 + y^3$ (umbílico hiperbólico),
3. $x^2 y + y^4$ (umbílico parabólico).

ISSN: 2447-6161

CONCLUSÕES

Com base no que foi desenvolvido durante a vigência do projeto "Introdução ao estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis: teoria e aplicação", ressalto a importância do trabalho para o desenvolvimento da minha vida acadêmica quanto discente de Matemática, visto que foi possível aprimorar e explorar os conhecimentos já adquiridos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra, e dentre outras, conforme se desenvolvia os estudos do projeto, e além disso, me proporcionou conhecer e adquirir novos conceitos matemáticos, possibilitando a inserção no ramo da Matemática pura.

No que concerne ao trabalho, destaco a importância dos resultados vistos na Transversalidade de Variedades, que foram importantes para o desenvolvimento das relações de equivalências entre os germes no E_n, pois a partir delas podemos classificar os germes de acordo com suas codimensões, e assim realizar um estudo mais detalhado de uma família de funções.

AGRADECIMENTOS

Deixo meus agradecimentos a Deus por me conceder esta oportunidade, ao meu orientador Prof. Joserlan Perote da Silva pelas orientações durante a vigência do projeto, a UNILAB pela anuência da bolsa que contemplou o projeto "Introdução ao estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis: teoria e aplicação", e a VIII Semana Universitária por me conceder a oportunidade de expor o que foi realizado no projeto.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 1, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 2, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 3, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Tenenblat, Keti; Introdução à Geometria Diferencial; Editora Universidade de Brasília; 1988.

V.I. Arnol'd, A. Varchenko & S. Gusein-Zade, Singularities of differentiable maps. Vol. I, Monographs in Mathematics, 82, Birkhäuser, 1985.

DIMCA, Alexandru. Singularities and topology of hypersurfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.

J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.

Bruce, J. W; Giblin, P. J. Curves and Singularities, second edition, Cambridge University Press, 1992.

Gibson, C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Pitman, 1979.

H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374–410.

J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.