TEORIA DE SINGULARIDADE: GERMES DO PLANO NO PLANO

Janaina, G. F. S.[1]
Joserlan, P. S.[2]

RESUMO

O presente trabalho é o resultado da participação no projeto de iniciação científica promovido pelo Programa de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB) edital 04/2020, cujo título é “Teoria de Singularidades” perante a orientação do Prof. Joserlan Perote da Silva vinculado ao curso de Licenciatura em Matemática. A Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis é uma extensão da disciplina Cálculo Diferencial e Integral vista no curso de Licenciatura em Matemática, que busca realizar estudos no conjunto das singularidades de famílias de funções, denominadas germes de funções, onde é feito uma escolha de um representante adequado, no sentido de facilitar os cálculos, para cada família de funções, e assim realizar um estudo, com a finalidade de classificar os germes. Neste texto, apresentaremos os elementos iniciais da Teoria de Singularidades as definições e resultados básicos, falando de funções diferenciáveis, formas normais (locais) das singularidades das funções reais e também das aplicações do plano no plano. No caso das funções reais do plano no plano iremos descrever as singularidades com codimensão menor ou igual a dois.

Palavras-chave: Singularidade; Funções; Formas normais; Aplicações do plano no plano.

Unilab, ICEN, Discente, janainagomesferreira15@gmail.com[1]
Unilab, ICEN, Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

O estudo da Teoria de Singularidades de aplicações diferenciais busca fazer uma extensão dos conhecimentos Matemáticos, já adquiridos em sala de aula nas disciplinas cursadas, tais como, Cálculo Diferencial e Integral I, II e III. Neste caso as funções são substituídas por famílias de funções, denominadas germes de funções, onde é feito uma escolha de um representante, e assim realizar um estudo, com a finalidade de classificar os germes.

Nosso objetivo é estudar os pontos críticos e as suas imagens por f, que são chamadas singularidades de f, e obter a classificação destas singularidades. A classificação de singularidades consiste em obter as classes de equivalência segundo a relação de equivalência natural que se compõe em mudanças de coordenadas locais do domínio e contradomínio. Ressalto que neste trabalho estudamos as relações de equivalência de Germes do plano no plano, ou equivalentemente, Germes em $E_{2,2}$.

METODOLOGIA

As atividades previstas no plano de trabalho foram realizadas conforme o desenvolvimento do projeto, inicialmente foi feito uma revisão bibliográfica com o objetivo de familiarizar o bolsista com conceitos e definições vistas na Teoria de Singularidade, procurando associar com os conteúdos estudados nas disciplinas de Matemática. Posteriormente foi realizado estudos referentes às definições e conceitos básicos de Germes em E_n e Germes do plano no plano, na tentativa de classificá-los segundo a relação de equivalência natural que se compõe em mudanças de coordenadas locais no domínio e contradomínio.

Dado isto, estudamos o conceito de germes, que é definido a partir de uma relação de equivalência. Dado duas aplicações suaves f_1:$U_1 \rightarrow$ P e f_2:$U_2 \rightarrow$ P elas serão equivalentes ($f_1 \sim f_2$) quando existir uma vizinhança U $\subset U_1 \cap U_2$ de x em N tal que as restrições $f_1 |_U$ e $f_2 |_U$ coincidem. As classes de equivalência dessa relação são chamadas de germes de aplicações em x e um elemento da classe de equivalência é um representante do germe.

Daí, E_n é o conjunto das aplicações de classe C^{infinito} tal que f: $(R^n, 0) \rightarrow R$, e do mesmo modo $E_{2,2}$ é o conjunto das aplicações de classe C^{infinito} tal que f: $(R^2,0) \rightarrow (R^2,0)$. No que se refere aos germes no n determinamos a sua classificação de acordo com a codimensão do seu representante para cada classe de R-equivalência. Neste caso, estudamos o germes com singularidade isolada com codimensão menor ou igual a cinco.

Definição de R-equivalência: Dois germes f e g: $(R^n,0) \rightarrow (R^n,0)$ em E_n são R-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo h: $(R^n,0) \rightarrow R^n,0$ tal que $f=g\circ h$.

Definição de codimensão: Dado um germe f $\in E_n$, a codimensão de f será a dimensão de $E_{n\,/}$J (f). Sendo J(f) um ideal em n gerado pelas derivadas parciais de f.

Quanto aos germes em $E_{2,2}$ que preservam a origem, a classificação se dá por meio das classes de equivalência que são determinadas a menos de mudanças de coordenadas na fonte e na meta, que chamamos de A-equivalência.

ISSN: 2447-6161

Definição de A-equivalência: Dois germes f e g são A-equivalentes se existem germes de difeomorfismo h: $(R^2, 0) \to R^2, 0$ e k: $(R^2, 0) \to R^2, 0$ tal que $f=k\circ g\circ h^{-1}$.

A partir daí, com a relação de A-equivalência passamos a classificar os germes com 2-jato(x,0) em $J^3(2,2)$.

Definição de Jatos: O espaço dos k-jatos Jkn,p é o espaço vetorial real das aplicações polinomiais g de R^n em R^p de grau ≤k com g(0)=0.

Por fim, ressalto que durante a vigência do projeto foram realizados encontros semanais com o orientador, virtualmente pelo Google Meet, no qual o momento era utilizado para discussões sobre as definições e demonstrações dos resultados encontrados durante o estudo/pesquisa. Além disso, para a realização da digitação de alguns trabalhos foi utilizado o látex, o qual também foi feito estudos e pesquisas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o desenvolvimento do projeto pudemos trabalhar as definições e resultados básicos da Teoria de Singularidades, falando de funções diferenciáveis com aplicações suaves e formas normais das singularidades das funções reais no 2,2 que preservam a origem com codimensão menor ou igual a dois, cujo principal objetivo foi obter uma lista parcial das classes de equivalência que são determinadas a menos de mudanças de coordenadas na fonte e na meta, ou seja a A-equivalência.

Diante disso, conseguimos chegar ao resultado que classifica os germes pertencentes ao $E_{2,2}$, que é enunciado da seguinte forma:

Teorema: (i) Para k≥3, todo k + 1 - jato com k - jato A-equivalente a (x, y^3) é A-equivalente a $(x, y^3 \pm x^k y)$ ou (x, y3). Os dois primeiros tem codimensão k -1.

(ii) Para k≥3, todo k - jato cujo k - 1 - jato seja A-equivalente a (x, xy^2) é A-equivalente a $(x, xy^2 +$ (somatorio)$^k{}_{i=4}\, a_{i,i}y^i)$. Se $a_{4,4}$ é diferente de 0 então o 4 - jato é equivalente a $(x, xy^2 + y^4)$.

(iii) Para k≥2, todo k+1-jato de codimensão finita, com k-jato A-equivalente a $(x, xy^2 + y^4)$ é A-equivalente a $(x, xy^2 + y^4 + y^{2k-1})$, este germe tem codimensão k - 2.

(iv) As outras órbitas tem codimensão maior ou igual a 2.

Teorema: Germes de codimensão menor ou igual a dois em $E_{2,2}$:

(i) Submersão, com forma normal (x, y) e codimensão 0.

(ii) Dobra, com forma normal (x, y^2) e codimensão 0.

(iii) Cúspide, com forma normal (x, y^3+xy) e codimensão 0.

(iv) Rabo de andorinha, com forma normal (x, y^4+xy) e codimensão 1.

(v) Lábios ou bicos, com forma normal $(x, y^3\pm x^2y)$ e codimensão 1.

(vi) Borboleta, com forma normal $(x, y^5+xy \pm y^7)$ e codimensão 2.

(vii) Ganso, com forma normal (x, y^3+x^3y) e codimensão 2.

ISSN: 2447-6161

(viii) Gaivota, com forma normal $(x, xy^2+y^4+y^5)$ e codimensão 2.

CONCLUSÕES

Diante do que foi desenvolvido durante a vigência do projeto “Teoria de Singularidades”, destaco a importância do trabalho para o desenvolvimento da minha vida acadêmica quanto discente de Matemática, visto que foi possível aprimorar e explorar os conhecimentos já adquiridos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral conforme se desenvolvia os estudos do projeto, e além disso, me proporcionou conhecer e adquirir novos conceitos matemáticos, possibilitando a inserção no ramo da Matemática pura.

No que concerne ao trabalho, destaco a importância das relações de equivalências, pois a partir delas podemos classificar os germes de acordo com suas codimensões, e assim realizar um estudo mais detalhado de uma família de funções.

AGRADECIMENTOS

Deixo meus agradecimentos a Deus por me conceder esta oportunidade, ao meu orientador Prof. Joserlan Perote da Silva pelas orientações durante a vigência do projeto, a UNILAB pela anuência da bolsa que contemplou o projeto “Teoria de Singularidades”, e a VIII Semana Universitária por me conceder a oportunidade de expor o que foi realizado no projeto.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H.L.CursodeCálculo–Volume1, 5 ª Edição.SãoPaulo:LTC,2011.
GUIDORIZZI, H.L.CursodeCálculo–Volume2, 5 ª Edição.SãoPaulo:LTC,2011.
GUIDORIZZI, H.L.CursodeCálculo–Volume3, 5 ª Edição.SãoPaulo:LTC,2011.
Gibson, C.G.SingularPointsofSmoothMappings, Pitman,1979.
LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374–410.

ISSN: 2447-6161