O PROBLEMA ISOPERIMETRICO

José Messias E Silva[1]
Rafael Jorge Pontes Diógenes[2]

RESUMO

Nesse projeto estudamos o problema isoperimétrico desde a sua versão para polígonos até algumas demonstrações para curvas planas que usam séries de Fourier ou desigualdades de Parserval. Foram estudadas algumas noções de geometria diferencial de superfícies, especificamente a primeira e a segunda formas fundamentais e diferenciabilidade. O Problema isoperimétrico (PI) consiste em encontrar uma resposta para a seguinte questão: Dentre todas as curvas planas de mesmo comprimento, fechadas e sem auto intersecção, qual delimita a maior área? A ideia da solução é de maximizar a área a e minimizar o perímetro ou comprimento da curva. Isso geralmente é feito usando as desigualdades isoperimétricas, que naturalmente majora o perímetro sobre a outra variável, cuja igualdade ocorre no caso ótimo e essa curva encontrada é a solução do problema. É sabido que a solução é a circunferência. Esse é um dos problemas clássicos em matemática, de maneira particular em Geometria, e atualmente ainda é objeto de estudo nas pesquisas.

Palavras-chave: Geometria; Área; Perímetro; Isoperimétrica.

Unilab, ICEN, Discente, josemessias1409@gmail.com[1]
Unilab, ICEN, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

O Problema Isoperimétrico é, sem dúvida um dos mais conhecidos e antigos da Geometria. Como as cidades eram cercadas por muros para a proteção e a construção deles era muito custosa, um problema que se apresentava era o de cercar a maior área possível com o mínimo de comprimento de perímetro, ou seja, menor comprimento do muro. Um grande desafio seria maximizar sua área de terra para plantio e moradia da sua população, ou seja, maximizar a área em relação ao perímetro.
Mas, afinal de contas, o que é o tal problema Isoperimétrico em sua definição formal para curvas planas? Trata-se da pergunta: Dentre todas as curvas planas C de mesmo comprimento, fechadas, ou seja, sendo I = [a,b] o seu domínio, tem-se que C(a)=C(b), sem auto intersecção, qual delas delimita a maior área? A resposta para essa questão é a circunferência.

METODOLOGIA

Foi utilizado como base artigos e um e-book disponibilizado pela SBM com as várias demonstrações a serem estudadas. No geral sempre tínhamos a sequência: estudo – encontro para tirar dúvidas – seminário apresentado ao orientador. Na etapa seguinte (estudo do caso no R^3) que se deu em um semestre no modo presencial, os seminários apresentados ao orientador foram presenciais e ocorreram nas salas de aula da Unilab.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Demonstramos, primeiramente que a solução do PI para triângulos era o equilátero e igualmente para os polígonos de quatro lados. Em seguida, generalizamos para polígonos de n lados e verificamos que a solução sempre será o caso regular. Verificamos que, fixado o perímetro, a área de um polígono regular aumenta à medida que a quantidade de lados cresce, olhando de uma forma recursiva, a solução geral aponta para o círculo, além disso, a constante encontrada como limite era a área do círculo e supondo que a solução seja única, acabamos de encontrá-la. Usando o método das reflexões, podemos excluir grande parte das curvas possíveis como “soluções”. Chegamos, então, a uma solução usando geometria diferencial de curvas. A ideia consiste em supor solução única para o problema, supor uma curva P.C.A (isso não afeta a generalidade), fixar o comprimento da curva, fixar um sistema de coordenadas cartesianas adequado e encontrar uma desigualdade para a área (a igualdade ocorre na solução), podemos variar o sistema cartesiano angularmente e encontrar a mesma desigualdade. Em seguida, verificamos uma solução usando séries de Fourier e outra usando multiplicadores e Lagrange, a primeira usava uma poderosa série presente na Física das vibrações. Essa última usa um método do cálculo a várias variáveis para encontrar máximos e mínimos de funções sobre conjuntos condicionados da forma g (x1, x2, ..., xn) = 0. Na etapa seguinte, encontramos alguns resultados relacionados às condições da solução do PI que relacionava área e bordo de uma superfície, uma delas era que a curvatura média deveria ser nula.

CONCLUSÕES

Demonstramos, primeiramente que a solução do PI para triângulos era o equilátero e igualmente para os polígonos de quatro lados. Em seguida, generalizamos para polígonos de n lados e verificamos que a solução sempre será o caso regular. Posteriormente foi verificado que faz sentido o círculo ser a solução para o PI,

ISSN: 2447-6161

pois a medida que o lado do polígono aumenta, ele se aproxima do círculo.

No segundo momento foi estudado o PI para curvas gerias no plano. De maneira particular foi estudado a demonstração que utiliza o método das reflexões, o método que utiliza cálculo diferencial, de maneira particular foi usado a Geometria Diferencial de Curvas além dos multiplicadores de Lagrange e, por fim, o método por série de Fourier.

AGRADECIMENTOS

Sou grato à Unilab pela oportunidade de ter contato com a pesquisa em geometria experimentado na duração desse projeto. Agradeço bastante ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Unilab pela concessão da bolsa durante a vigência do projeto referido.

REFERÊNCIAS

-CARMO, M. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção Textos Universitários).

-LIMBERGER, R. Abordagens do problema isoperimétrico. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Campinas, 2011.

-LOMAS, F. Problemas Isoperimétricos: Uma abordagem no ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade de São Paulo, 2016.

-MORETO, F. O problema isoperimétrico e aplicações para o ensino médio. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, 2013.

-TENENBLAT, K. Introdução à geometria diferencial. São Paulo: Blucher, 2008.

ISSN: 2447-6161