UMA DERIVAÇÃO RIGOROSA DA EQUAÇÃO DE ONDA UNIDIMENSIONAL DE UMA CORDA VIBRANTE

Mateus Mussunda Landa[1]
Levi Rodrigues Leite[2]

RESUMO

No presente trabalho nos propusemos a trabalhar na compreensão e elaboração de uma derivação rigorosa da equação de onda unidimensional de uma corda vibrante partindo da necessidade identificada nos livros de física da graduação, pois que, a equação do movimento de uma corda, que sob certas condições pode ser aproximada pela equação da onda, é deduzida usando o formalismo infinitesimal, que não é bem definido no cálculo convencional. Essa abordagem pode não ser bem aceita por estudantes preocupados com o rigor matemático. Neste trabalho, apresentamos uma prova rigorosa para a equação do movimento de uma corda vibrante usando o cálculo convencional. Notamos que a equação de onda obtida em nossa abordagem tem tanto uma tensão quanto uma força externa que depende da posição e do tempo. Uma discussão foi feita ao longo da dedução para detalhar as diferenças entre a abordagem via infinitesimais e via cálculo convencional. por conseguinte, ao longo do programa buscamos incessantemente a conclusão exitosa do que foi proposto e conseguimos ao final do programa compreender de maneira ampla a proposta do artigo, sua fundamentação teórica, buscando fundamentos matemáticos além do programa de nível de graduação do curso de Física e tendo que ao final resolver mais dois problemas com finalidade de verificar a consistência da equação deduzida, sendo que o segundo problema criado serviu para determinar a solução geral da equação do movimento com a força externa sendo nula, com densidade que dependia linearmente da posição e sujeita a uma tensão constante, e o terceiro problema era similar ao segundo, mas desta vez, tanto a densidade como a tensão variavam linearmente na posição e tempo respectivamente.

Palavras-chave: Equação da onda; Derivação; Corda vibrante.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira- UNILAB, Instituto de Ciência Exatas e da Natureza-ICEN, Discente, landateu@gmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira- UNILAB, Instituto de Ciência Exatas e da Natureza-ICEN, Docente, levi@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

O processo de D'Alembert de derivar a equação de movimento da corda foi baseado em conceitos físicos iniciais em meios contínuos, que era uma abordagem usual, já que o formalismo do cálculo moderno ainda não estava bem estabelecido. O próprio Newton usou o formalismo infinitesimal em seus primeiros trabalhos, mas depois substituiu por ideias com melhor fundamento lógico. Leibniz, por outro lado, formulou as regras de funcionamento para o formalismo diferencial, sem provas, porém nunca encontrando uma definição satisfatória para uma. Hoje, embora os diferenciais sejam definidos de forma rigorosa em cálculo não padronizado, essa definição raramente é usada em cursos de graduação em física. Muitos livros de física de graduação usam o formalismo diferencial de forma heurística para derivar muitas equações físicas, por exemplo, a equação de movimento para uma corda vibrante. Isso pode ser uma fonte de alguma frustração para aqueles alunos que consideram uma abordagem matemática mais fundamental para o raciocínio físico. Neste artigo mostramos uma derivação rigorosa da equação de onda para uma corda vibrante usando o cálculo padrão que geralmente é estudado em qualquer curso de graduação em física. Além disso, nossa demonstração esclarece algumas aproximações normalmente feitas em livros de física e, para uma descrição mais precisa, obtém-se uma equação de movimento mais geral para uma corda vibrante

METODOLOGIA

Usamos o cálculo padrão que geralmente é estudado em qualquer curso de graduação em física, por intermédio de uma pesquisa bibliográfica, da busca de autores que debruçaram sobre o tema, Além disso, buscamos demonstrar que nossa equação esclarece algumas aproximações normalmente feitas em livros de física e, para uma descrição mais precisa, obtém-se uma equação de movimento mais geral para uma corda vibrante. No presente trabalho consideramos um sistema onde a massa é distribuída continuamente ao longo de uma curva, e para descrever um meio contínuo é conveniente reescrever a segunda lei da mecânica de Newton para um sistema de partículas como mostra a imagem.

$$\bar{F} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}^2 r_i}{\mathrm{d}t^2}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

A massa é dada pela densidade linear da curva.

$$m_j = \int_{\mathrm{i} \in j} \lambda(\mathrm{i})\, \mathrm{di}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Rescrevendo a segunda lei de Newton.

$$F = \int_{\mathrm{i} \in j} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}(\mathrm{i}, t)\lambda(\mathrm{i})\, \mathrm{di}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Definimos a tensão, como sendo a força que parte da corda com coordenadas maiores que x e puxa a outra

ISSN: 2447-6161

parte

$$T(x,t) = T(x,t)\tau(x,t)$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Definimos o vetor unitário da tensão

$$T(xt) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}}\left(1, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Fizemos o somatório de forças que atuam no sistema.

$$\text{F} = T(x,t)\tau(x,t) - T(x,t)\tau(x,t) + \int_{x}^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(\mathrm{x}, t)\lambda(\mathrm{x})\, \mathrm{d}x$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Vimos que a tensão não depende da posição e usamos o teorema do valor médio para as integrais encontradas

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao apresentar uma dedução mais rigorosa do movimento de uma corda vibrante, foi possível aprofundar o entendimento do movimento de uma onda transversal que se propaga ao longo de uma corda. Foram demonstradas as duas equações que são mais gerais do que as equações usualmente deduzidas nos cursos de graduação em física, apresentada na imagem.

$$\frac{T(xt)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathrm{x}, t) + F(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathrm{x}, t)\lambda(\mathrm{x})$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Tomando a derivada da função em relação ao x, temos que a seguinte aproximação é válida, pela imagem.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{x}, t) \ll 1 \rightarrow \sqrt{1+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2} \approx 1$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Por final, chegamos a equação da onda unidimensional de uma corda vibrante apresentada na imagem.

$$T(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathrm{x}, t) + F(x,t) = \lambda(\mathrm{x})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathrm{x}, t)$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

ISSN: 2447-6161

É importante notar que tanto a tensão obtida quanto a força externa dependem da posição e do tempo. Também podemos notar que em nossa dedução a densidade linear da corda é dependente da posição, o que nos permite estudar sistemas onde a densidade linear depende da posição. A aproximação correta da nossa equação da onda unidimensional em uma corda vibrante também é útil para determinar a validade da equação de onda. Por fim, essa dedução também pode ser usada para exercitar técnicas de física-matemática

CONCLUSÕES

Ao apresentar uma dedução mais rigorosa do movimento de uma corda vibrante, foi possível aprofundar o entendimento do movimento de uma onda transversal que se propaga ao longo de uma corda. Foi demonstrada a equação da onda que é a mais geral do que a equação usualmente deduzida nos cursos de graduação em física. É importante destacar que tanto a tensão obtida quanto a força externa dependem de x e t. Também podemos notar que em nossa dedução a densidade linear da corda é dependente de x, o que nos permite estudar sistemas onde a densidade linear depende da posição. A aproximação feita do movimento na vertical por ser muito pequeno e desprezível também é útil para determinar a validade da equação de onda. Por fim, essa dedução também pode ser usada para exercitar técnicas de física-matemática

AGRADECIMENTOS

Quero agradece a todos que contribuíram neste trabalhos, professores, colegas, ao ICEN e os programas de bolsa como: FUNCAP, CAPES, PROPPG E GOVERNO DO ESTADO DO CEARÁ

REFERÊNCIAS

LEITHOLD, L. O Cálculo-3-vol.2a . [S.l.]: Edição, 1994.
LIMA, E. L. Análise real: Funções de uma variável-vol. 1. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.
LIMA, E. L. Análise real: Funções de uma variável-vol. 2. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.
MACHADO, K. D. Equacoes Diferenciais Aplicadas a Fisica. [S.l.]: Editora UEPG, 2004. MEDEIROS, L. A.; FERREL, J.; BIAZUTTI, A. Métodos clássicos em equaçoes diferenciais parciais. [S.l.: s.n.], 2005.
NUSSENZVEIG, H. M. Curso de fisica basica-vol.2. [S.l.]: Edgard Blucher, 2002. reimp. 2007., 2002.
SILVA, M. C. D. d. Equações diferenciais parciais e suas aplicações. 2016. SIMÕES, C. A. E. Equações diferenciais na física. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Évora, 2014.