ESPAÇOS MÉTRICOS E O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Larissa Braga Fernandes[1]
João Francisco Da Silva Filho[2]

RESUMO

Este trabalho aborda os espaços métricos e o Teorema do ponto fixo de Banach, que possui aplicações, principalmente relacionadas à Análise Numérica e às Equações Diferenciais e Integrais. Os espaços métricos são conjuntos não vazios munidos com uma função real não negativa, chamada de métrica, a qual associa cada par ordenado do conjunto a um número real não negativo. Destacamos que uma métrica anula-se somente em pares ordenados com coordenadas iguais e também satisfazem a propriedade simétrica e a desigualdade triangular. Um interessante resultado sobre espaços métricos é o chamado Teorema do ponto fixo de Banach, aplicado a uma classe de funções contínuas, chamadas de contrações, definidas em subconjuntos fechados de espaços métricos completos, ou seja, espaços métricos que possui a propriedade de que toda sequência de Cauchy (ou sequência fundamental) é convergente. Basicamente, o Teorema do ponto fixo de Banach garante a existência e unicidade de pontos fixos de contrações definidas em subconjuntos fechados de espaços métricos completos e dentre suas várias aplicações, podemos citar o método de Newton-Raphson que receberá um destaque especial neste trabalho.

Palavras-chave: Espaços métricos completos; Teorema do ponto fixo de Banach; Polinômios do quarto grau; Método de Newton-Raphson.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira , Ceará, Discente, larissa.fernandes1234545@gmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira , Ceará, Docente, joaofilho@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

Como mencionado no resumo, os espaços métricos são conjuntos não-vazios onde a distância entre quaisquer dois pontos está bem definida, por uma função chamada métrica. Além disso, encontram-se presentes em diversas subáreas da Matemática e seus elementos apresentam naturezas bem variadas, podendo ser: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Convém salientar que esses espaços possuem uma grande riqueza de propriedades geométricas e topológicas, possibilitando a obtenção de interessantes resultados e diversas aplicações, tanto em Matemática Pura quanto em Matemática Aplicada.

Um importante resultado sobre espaços métricos é o Teorema do ponto fixo de Banach, que garante existência e unicidade de pontos fixos de aplicações contínuas particulares, chamadas de contrações, definidas em subconjuntos fechados de espaços métricos completos, ou seja, espaços métricos nos quais toda sequência de Cauchy é convergente, conforme pode ser encontrado em Botelho (2010), Oliveira (2008) e Lima (2009). Esse teorema fornece um método iterativo que nos permite calcular aproximações dos pontos fixos e estimativas do erro de truncamento a cada iteração, constituindo-se numa poderosa ferramenta.

Além das aplicações citadas no resumo, há outras relacionadas ao estudo de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais e/ou integrais. Mais precisamente, podemos mencionar o famoso Teorema de Picard para equações diferenciais, bem como o estudo de soluções das equações integrais dos tipos Fredholm e Volterra, abordadas em Figueiredo e Neves (2012) e Sotomayor (1979). Devemos ainda mencionar as aplicações desse teorema, relacionadas à compressão de imagens e ferramentas de buscas da internet, conforme descrito por Barros (2013).

METODOLOGIA

Para a execução das atividades previstas em nosso projeto de pesquisa, foram estudadas algumas notas de aula, artigos, trabalhos de conclusão e livros relacionados a temática do trabalho para obter os pré-requisitos necessários ao estudo de espaços métricos completos e contrações matemáticas, objetivando chegar ao teorema do ponto fixo de Banach.

Na etapa final do projeto, trabalhamos com uma abordagem mais geral sobre algumas das generalizações e aplicações do teorema do ponto fixo, visto que o referido teorema apresenta-se como uma importante ferramenta para o desenvolvimento de métodos numéricos iterativos, em destaque apresentamos o método de Newton-Raphson, que quando combinado com o método de Ferrari fornece uma poderosa ferramenta capaz de encontrar as raízes de equações polinomiais do quarto grau, contornando os problemas que aparecem no método de Cardano-Tartaglia.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Estudar os espaços métricos, em particular, os espaços métricos completos nos fornecem uma riqueza de propriedades geométricas e importantes resultados como o Teorema do ponto fixo de Banach, que constitui uma poderosa ferramenta com diversas aplicações em Matemática Pura e Aplicada. Neste sentido, inspirados em aplicações voltadas à Análise Numérica, procuramos explorar um pouco mais o estudo das raízes de polinômios, em especial, polinômios do quarto grau.

Diante do exposto, através de uma combinação do método de Ferrari com o método de Newton-Raphson, deduzimos um método alternativo para determinar as raízes reais e complexas não reais (ou aproximações decimais de raízes) de polinômios do quarto grau, contornando as dificuldades práticas do método de Ferrari, bem como na escolha do valor inicial de uma sequência que nos leva às raízes (ou aproximações das raízes) e na redução do número de passos a serem realizados.

ISSN: 2447-6161

CONCLUSÕES

Devido às dificuldades de trabalhar separadamente com os métodos de Ferrari e Newton Raphson, verificamos uma maior eficiência ao combinar os dois métodos de forma conveniente a fim de contornar a impossibilidade de simplificar radicais que estão presentes em alguns casos, ao aplicar o método de Ferrari, bem como contornar a imprecisão de informações sobre o valor inicial e o número de passos necessários à aplicação do método de Newton-Raphson.

Nessas condições, o método obtido da combinação desses métodos não necessita de simplificação de radicais, apresenta informações sobre valor inicial a ser escolhido no início do processo e resume a aplicação a um procedimento que determina todas as raízes (ou aproximações decimais das raízes) de uma única vez. Nessa perspectiva apresentamos neste trabalho exemplos onde calculamos com o auxílio do Excel e de um modo iterativo as raízes de um polinômio do quarto grau, utilizando o método de Newton-Raphson para encontrar a raiz do polinômio auxiliar obtido através do método de Ludovico Ferrari.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica - BICT da Funcap pela concessão da bolsa durante a vigência do projeto, à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira - Unilab, à organização da VIII Semana Universitária da Unilab e ao evento pela oportunidade, bem como ao professor Dr. João Francisco pelas orientações.

REFERÊNCIAS

ARNALES, S. DAREZZO, A. Cálculo Numérico: Aprendizagem com Apoio de Software. São Paulo: Thompson, 2000.

BARROS, C. D. O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas aplicações. 2013, 53 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - PROFMAT, Universidade Federal da Paraiba, João Pessoa, 2013.

BOTELHO, G. at el. Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Análise Numérica. São Paulo: Thompson, 2008.

LIMA, E. L. Curso de Análise – Volume 1, 10ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

LIMA, E. L. Curso de Análise – Volume 2, 10ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LIMA, E. L. Espaços Métricos, 4ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

LIMA, E. L. Elementos de Topologia Geral, 3ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, E. L. Análise Real – Volume 2, 6ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. Análise Real – Volume 1, 11ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LOPES, V. L. R.; RUGGIERO, M. A. G. Cálculo Numérico: Aspectos Numéricos e Computacionais, 2ª Edição. São Paulo: Makron Books, 1997.

FERNANDES, L. B.; SILVA, J. F. Revisitando as Equações do Quarto Grau. Redenção, 2022. (Artigo em Elaboração).

OLIVEIRA, C. R. Introdução à Análise Funcional, 2ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

ISSN: 2447-6161