TEORIA DE SINGULARIDADES: CLASSEFICAÇÃO DE SINGULARIDADES

Joserlan Perote Da Silva[1]
Julio Gomes[2]

RESUMO

A teoria de singularidade se coloca naturalmente no estudo de funções reais a uma variável no curso de cálculo I, onde é visto como descrever estas funções partir dos seus pontos críticos, que são aqueles onde a primeira derivada se anula. Este trabalho é parte do projeto de iniciação científica BICT/FUNCAP que objetiva dar uma base sólida ao aluno sobre o conceito de singularidades de aplicações diferenciáveis a partir do conceito de cálculo diferencial adquirido no seu curso de licenciatura em matemática. Assim este trabalho tem como objetivo fazer apresentação das classificações das singularidades realizados no âmbito das atividades deste projeto. Os trabalhos foram desenvolvidos no primeiro e segundo semestre da vigência do projeto de pesquisa entre outubro de 2021 à agosto de 2022, com o propósito de classificar as singularidades usando os resultados de Arnol'd (1985) e de Thom (1972) no caso das funções reais para escrever as singularidades em funções com codimensão menor ou igual a cinco.

Palavras-chave: Teoria de Singularidades; Aplicações diferenciáveis; classificação de singularidades.

UNILAB, ICEN, Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[1]
unilab, ICEN, Discente, julioanto85nio@gmail.com[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

A teoria de singularidade se coloca naturalmente no estudo de funções reais a uma variável no curso de cálculo I, onde é visto como descrever estas funções partir dos seus pontos críticos, que são aqueles onde a primeira derivada se anula. No estudo de aplicações f: U → R^p, onde U é um interv aberto de R^n e f é de classe C^∞, este conceito aparece naturalmente e dizemos que um ponto x ∈ U é um ponto crítico de f se a sua matriz das derivadas parciais calculada no ponto x não tem posto máximo. O objetivo inicial da teoria de singularidades foi justamente estudar estes pontos críticos e as suas imagens por f, que são as chamadas singularidades de f.

Cada área tem sua noção natural de relação de equivalência e um dos objetivos é listar seus objetos a menos desta equivalência. Assim por exemplo, temos a noção de isomorfismo para espaços vetoriais ou grupos e difeomorfismos para superfícies. No caso de aplicações de classe C^∞ definidas em abertos de R^n com valores em R^p a relação de equivalência natural consiste em mudanças de coordenadas locais (difeomorfismos locais) no domínio e contradomínio. Assim, classificar singularidades é obter as classes de equivalência segundo esta relação. Podemos entender esta classificação como uma continuação natural do estudo de cálculo em várias variáveis, onde os resultados finais nos levam às formas locais das imersões e das submersões, com aplicações definidas em conjuntos que tem somente pontos regulares, e o teorema do posto constante que considera conjuntos com somente um tipo de ponto crítico, ou seja, um aberto em que todos os pontos são críticos tem o mesmo posto. Neste sentido, a teoria de singularidades começa a partir do Teorema do posto constante, onde são estudadas funções ou aplicações definidas em abertos que tem diferentes tipos de pontos críticos. Neste caso, a questão mais natural que se coloca é determinar uma forma normal (local) descrevendo cada tipo de singularidade da aplicação.

Este trabalho é parte do projeto de iniciação científica BICT/FUNCAP que objetiva dar uma base sólida ao aluno sobre o conceito de singularidades de aplicações diferenciáveis a partir do conceito de cálculo diferencial adquirido no seu curso de licenciatura em matemática.

METODOLOGIA

Os trabalhos foram desenvolvidos no primeiro e segundo semestre da vigência do projeto de pesquisa entre outubro de 2021 à agosto de 2022. Em primeiro semestre do projeto houve encontros semanais entre o aluno-autor e o orientador onde foram discutidos os conceitos de cálculo diferencial que é uma ferramenta importante no estudo de Teoria de Singularidade. Também houve momentos de aprendizagem e familiarização com softwares Mathematica e editores do formato Látex que são importante no contexto de textos matemáticos.

Por fim no segundo semestre, continuaram encontros semanais entre o aluno e orientador onde ocorreram os trabalhos de classificação de singularidade usando os resultados de Arnol'd (1985) e de Thom (1972) no caso das funções reais para escrever as singularidades em funções com codimensão menor ou igual a cinco.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Entre assuntos trabalhados no projeto, destacamos: A classificação dos germes de função se realiza ao determinarmos um representante para cada classe de R-equivalência. Em geral os representantes escolhidos são aqueles que têm a forma mais simples possível com relação a um sistema de coordenadas conveniente. A estes germes damos o nome de forma normal para esta classe de equivalência. Primeiramente iniciemos a

ISSN: 2447-6161

classificação de germes de codimensão zero, que são germes que quando derivada primeira da função no ponto (0,0) não se anula, nesse caso origem não é ponto singular, dizemos que germes de codimensão zero, então nesse caso, f é equivalente a (x_1, ,,x_n) → x_1.

Para classificação dos germes de codimensão 1, o mesmo procedimento, mas esta vez a derivada segunda não se anula no ponto (0,0) e dizemos que um germe f ∈ m2n (isto é, a origem é um ponto singular) é não degenerado se a matriz Hessiana H (f (0)) é não singular. Com isso, temos o Lema Morse, diz seguinte: um germe f ∈ m2n é de codimensão 1 se, e somente se, é não degenerado. Neste caso f é equivalência a um germe da forma (x_1, ..., x_n) → x21 + . . . + xs2 – x2s+1 - ... – x2n. No caso de f ∈ mn^2 de codimensão maior ou igual a dois. Dizemos que f tem coposto c se o posto da matriz Hessiana de f é n – c.

Com isso, vamos falar de um Lema auxiliar que chamamos de Lema da Separação: Seja f ∈ m2n de coposto c. Então f é equivalente ao germe (x_1, x_2, . . ., x_n) →g (x_1, . . ., x_c) + x2c+1 . + . . + x2n. Observamos que neste caso os germes f e g têm a mesma codimensão.

Proposição: Seja f ∈ m2n de coposto 1 e codimensão k. Então f é equivalente ao germe (x_1, ..., x_n) →+ xk+11 + x22 + . . . + x2n. Este germe é chamado de singularidade Ak.

Lema: Se f ∈ m2n é um germe de codimensão finita e de coposto c, então cod f ≥ C(C+1) /2 +1. Por último estudamos o resultado de R. Tom, que diz:

Proposição: para todo germe f ∈ m2n e codimensão menor ou igual a 5 é equivalente, a menos da soma de uma forma quadrática não degenerada em n – 2 varáveis. Equivalente a um dos seguintes germes:

i) x^3, se codf = 2, nesse caso chamamos dobra;

ii) x^4, se codf = 3, nesse caso chamamos cúspide;

iii) xe^5, se codf = 4, nesse caso chamamos rabo de andorinha e

iv) x^6, se codf = 5, nesse caso chamamos borboleta.

CONCLUSÕES

No fim deste trabalho, foi possível compreender a relevância do estudo das funções reais em relação a uma variável no cálculo 1, onde é visto a descrição destas funções a partir dos seus pontos críticos, onde a primeira derivada será nula, assim como estudo de aplicações f: U → R^p, onde U é um intervalo aberto de R^p e f é classe C^∞, dizemos que x∈U é um ponto crítico de f, se a sua matriz das derivadas parciais nesses pontos x não tem posto máximo. Esses pontos críticos assim como as suas imagens foram importantes no estudo de Teoria de Singularidade. Por fim, fizemos gráficos de: equivalências de dois Germes; Imersões e Submersões para poder falar do posto constante, com ajuda na interpretação do professor orientador Joserlan Perote da Silva. No último fizemos cálculo de codimensão de f com apoio de Orientador, para poder fazer classificação de Germes que é um dos resultados importantes no estudo de Teoria de Singularidade.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço à Deus pela a vida, e por me permitir ultrapassar os obstáculos encontrados. Aos meus pais, pelo apoio, ajuda e incentivo ao longo do caminho, ao meu professor e orientador Joserlan Perote da Silva, pela paciência e pelos ensinamentos que me permitiram um bom desempenho no decorrer deste projeto. Faltam-me palavras para expressar a minha gratidão: Ao programa BICT/FUNCAP pela aceitação e oportunidade que meEm primeiro lugar, agradeço à Deus pela a vida, e por me permitir ultrapassar os obstáculos encontrados. Aos meus pais, pelo apoio, ajuda e incentivo ao longo do caminho, ao

ISSN: 2447-6161

meu professor e orientador Joserlan Perote da Silva, pela paciência e pelos ensinamentos que me permitiram um bom desempenho no decorrer deste projeto. Faltam-me palavras para expressar a minha gratidão: Ao programa BICT/FUNCAP pela aceitação e oportunidade que me foi dado; a instituição de ensino UNILAB e todos os meus professores pelo cuidado e zelo que têm por mim.

REFERÊNCIAS

[1] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 1, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[2] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 2, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[3] GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo – Volume 3, 5ª Edição. São Paulo: LTC, 2011.
[4] LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
[5] LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
[6] Tenenblat, Keti; Introdução à Geometria Diferencial; Editora Universidade de Brasília; 1988.
[7] Saunders, P.T.; An Introduction to Catastrophe Theory; Cambridge University Press; 1980
[8] V.I. Arnol'd, A. Varchenko & S. Gusein-Zade, Singularities of differentiable maps. Vol. I, Monographs in Mathematics, 82, Birkhäuser, 1985
[9] EBELING, Wolfgang. Functions os several complex variable and their singularities. Tradução de Philip Spain. Providence: American Mathematical Society, 1992. Tradução de: Funktionentheorie, dierentialtopologie and singularitäten.
[10] DIMCA, Alexandru. Singularities and topology of hypersurfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.
[11] R. Thom, Stabilité structurelle et morphogénèse. (French) Essai d'une théorie générale des modèles, Mathematical Physics Monograph Series. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1972. 362 pp.
[12] Bruce, J. W; Giblin, P. J. Curves and Singularities, second edition, Cambridge University Press, 1992.
[13] Gibson, C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Pitman, 1979.
[14] C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map germs, Bull. London Math. Soc. 13, (1981), 481–539
[15] MILNOR, John. Singular points of complex hypersurfaces. Princeton: Princeton University Press, 1968.
[16] H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374–410.
[17] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.