CURVAS GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES

Aline Glivia Da Silva Santos[1]
Rafael Jorge Pontes Diógenes[2]

RESUMO

O projeto visou estudar as Curvas Geodésicas em superfícies do espaço euclidiano tridimensional, tais como as superfícies de revolução, regradas e que são gráficos de funções. As Geodésicas são consideradas as curvas mais importantes das superfícies, na qual, uma de suas principais propriedades é que elas são curvas que minimizam, localmente, distâncias entre dois pontos de uma superfície. O nome Geodésica tem origem grega, onde *Geo* significa terra. Seu surgimento partiu dos gregos antigos, que queriam encontrar o caminho mais curto entre lugares na superfície da terra. Porém, somente no século XVII, com o surgimento do Cálculo Diferencial é que se tem uma definição formal das Geodésicas. Através dos estudos com o decorrer dos anos, sabemos que as curvas Geodésicas são intrínsecas, isto é, dependem apenas da primeira forma fundamental, em outras palavras são preservadas por isometria. Estas curvas desempenham um papel fundamental nos estudos das superfícies, como a aplicação exponencial, coordenadas polares geodésicas, vizinhanças geodésicas e também nas propriedades globais das superfícies, assim percebe-se que essas curvas merecem uma atenção especial. Nesse sentido, o principal objetivo do projeto é descrever todas as Geodésicas de algumas superfícies. Para isso, a metodologia consistiu em uma pesquisa bibliográfica, tendo como resultados alcançados as construções feitas no *software* Geogebra, que possibilitaram compreender ainda melhor as Curvas Geodésicas e dar ao projeto uma perspectiva visual e atrativa. Contudo, foi possível concluir que existe muita coisa ainda para estudar sobre as Curvas Geodésicas, isto é, encontrar métodos numéricos mais fáceis para se obter as Geodésicas nas superfícies de revolução, regradas e que são gráficos de funções.

Palavras-chave: Curvas Geodésicas; Superfícies; Propriedades.

UNILAB - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN - Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, alineglivia@gmail.com[1]
UNILAB - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN - Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, faremos uma breve explanação acerca das Curvas Geodésicas, fazendo uso de conceitos e resultados da Geometria Diferencial de Curvas. Nos estudos realizados durante o projeto, conseguimos perceber que a definição do vetor aceleração é essencial para se entender a definição das Geodésicas e suas equações. Isso porque, através da segunda derivada (vetor aceleração) e dos símbolos de *Christofell* conseguimos chegar as equações diferenciais das Geodésicas.

Com isso, podemos definir as Curvas Geodésicas como: U*ma curva parametrizada, não constante,* $\alpha: I \to S$ *com* $t \in I$ *se o seu campo de vetores tangentes* $\alpha'(t)$ *é paralelo ao longo de* α *em* t*, isto é,* $\frac{D\alpha'(t)}{dt}=0$. Assim, dizemos que α é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo $t \in I$.

Desse modo, é possível concluirmos que se em uma superfície existe uma reta parametrizada pelo comprimento de arco, então esta será geodésica sobre uma superfície, pois $\alpha''(s)=0$ para todo $s \in I$. Portanto, uma geodésica é o que mais se aproxima de uma "reta" sobre uma superfície.

Além disso, uma curva parametrizada $\alpha(t)=X(u(t),v(t))$, com $t \in R$ de uma superfície S é uma geodésica se, e somente se, as funções $u(t), v(t)$, satisfazem o sistema de equações:

$$u''+(u')^2\Gamma_{11}^1+2u'v'\Gamma_{12}^1+(v')^2\Gamma_{22}^1=0$$
$$v''+(u')^2\Gamma_{11}^2+2u'v'\Gamma_{12}^2+(v')^2\Gamma_{22}^2=0.$$

Aplicando esse sistema de equações e analisando localmente as geodésicas no caso em que uma superfície $S \subset R^3$ é uma superfície de revolução, no qual, $X(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\operatorname{sen} v, g(u))$, sendo v o ângulo de rotação em torno do eixo z e $f(u)>0$, temos que todos os meridianos parametrizados pelo comprimento de arco são sempre geodésicas e para um paralelo, parametrizado pelo comprimento de arco, seja geodésica é necessário que $f'(u)=0$.

Ainda temos que, a equação de um segmento de geodésica de uma superfície de revolução que não é um meridiano nem um paralelo é dado por:

$$v(u)=c\int \frac{1}{f(u)}\sqrt{\frac{(f'(u))^2+(g'(u))^2}{f(u)^2-c^2}}\,du+const.$$

METODOLOGIA

Inicialmente, foram estudados conceitos elementares da Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, tais como, curvas regulares, superfícies regulares, curvatura normal, primeira e segunda formas fundamentais, campos de vetores, teorema de Gauss, transporte paralelo e derivada covariante. Já nos estudos sobre as Geodésicas, foi estudado de modo detalhado o conceito de Geodésicas sobre superfícies de revolução, analisando suas principais características analíticas.

Após os estudos desses conceitos, partimos para a exploração das Geodésicas em outras superfícies, como as superfícies regradas e superfícies gráfico de uma função. Nesse período, buscamos por trabalhos científicos que ajudasse na determinação das Geodésicas nas superfícies regradas e em gráfico de uma função e também na compreensão das Geodésicas no Cálculo Variacional.

No entanto, a investigação das Geodésicas na superfície de revolução foi bem trabalhosa, pois surgiu bastante dúvidas e situações que precisaram de muito tempo para assimilação. Assim, a pesquisa das Geodésicas nas superfícies regradas e de gráfico de uma função não foram exploradas profundamente.

Portanto, a metodologia desenvolvida nas atividades realizadas consistiu, sobretudo, numa pesquisa bibliográfica, consultando livros, artigos científicos e explorando o *software* Geogebra. Os materiais de consultas foram selecionados pelo professor responsável pelo projeto e também foram utilizados artigos encontrados durante pesquisas relacionadas ao assunto. Também foram realizadas discussões de exercícios para melhor compreensão do tema.

ISSN: 2447-6161

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados alcançados são relacionados as construções no Geogebra que facilitaram a compreensão do comportamento das Curvas Geodésicas nas superfícies de revolução. As principais construções foram com relação a obtenção das Curvas Geodésicas do cilindro, esfera e toro.

As geodésicas do cilindro são todos os paralelos, os meridianos e a geodésica que não é paralelo nem meridiano é uma helicoide. Vimos também as geodésicas da esfera, nessa superfície estudamos alguns métodos de provar que as únicas geodésicas na esfera são os meridianos ou círculos máximos. Um dos métodos vistos foi da Mestra em Matemática Ariana Matos (2016), que apresenta cálculos precisos de demonstrar as geodésicas da esfera.

As geodésicas do toro, considerando as funções que descrevem o toro como: $f(u)=a+r\cos u$, $g(u)=r \operatorname{sen} u$ onde $a > r > 0$ e $u,v \in R$, temos que todos os meridianos são geodésicas. Além disso, como $f'(u)=-r \operatorname{sen} u=0$, quando $u=0$ e $v=\pi$, então as circunferências interior e exterior do toro são geodésicas.

As outras geodésicas do toro são caracterizadas por:

$$dv/du=cr/(a+r\cos u\sqrt{(a+r\cos u)^2-c^2}),$$

onde,

$$v(u)=cr\int 1/(a+r\cos u\sqrt{(a+r\cos u)^2-c^2})\,du.$$

Nesse sentido, aplicando a equação de um segmento de geodésica de uma superfície de revolução que não é um meridiano nem um paralelo em outras superfícies de revolução, constatamos que não funciona muito bem, pois chegamos em EDOs difíceis de encontrar soluções. Foi o caso do parabolóide de revolução, hiperbolóide de revolução e o cone.

CONCLUSÕES

Com este trabalho é possível concluir que existe muita coisa ainda para estudar sobre as curvas geodésicas, isto é, encontrar métodos numéricos mais fáceis para se obter as geodésicas nas superfícies de revolução. Porém, a nossa proposta foi mostrar algumas geodésicas nas superfícies de revolução se utilizando dos conceitos apresentados em Carmo (2014).

Porém, existem outras maneiras de encontrar as geodésicas, no qual podemos nos utilizar dos conceitos do Cálculo Variacional, que ajuda a encontrar as curvas de comprimento mínimo que unem dois pontos. A curvatura geodésica de uma curva também ajuda a medir o quão longe a curva é de ser uma geodésica, essa curvatura depende apenas da primeira forma fundamental, portanto é um valor intrínseco à superfície.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Rafael Diógenes por me proporcionar ter a experiência na iniciação científica e por me orientar tão pacientemente durante a vigência da bolsa.

À UNILAB (Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira), por fomentar atividades de pesquisa.

REFERÊNCIAS

ISSN: 2447-6161

BIEZUNER, Rodney Josué. **Notas de Aula: Geometria Diferencial.** Universidade Federal de Minas Gerais, 2019.

BRUXEL, Daniel Argeu. **Um estudo sobre curvas geodésicas.** Universidade Federal da Fronteira Sul, 2018.

CARMO, M. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.** 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM 2014.

MATOS, Ariana Cordeiro de Amorim. **Geodésicas: suas equações e algumas aplicações.** Universidade Estadual de Feira de Santana, 2016.

GUTIERREZ, María Victoria. **Las Geodesicas del toro.** Boletín de Matemáticas, Colômbia, v.15, n.3, p. 146-161, 1981.

TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial.** 2ª edição revisada. São Paulo: Blucher, 2008.

RUGGIERO, R. **Geodésicas em Superfícies de, uma introdução, III Colóquio de Matemática da Região Sul.** 2014. Disponível em: http://www.ufsc.br/coloquiosul/notas_minicurso_7.pdf.

ISSN: 2447-6161