CAMPOS DE VETORES CONFORMES E FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS

Larissa Braga Fernandes[1]
João Francisco Da Silva Filho [2]

RESUMO

O presente trabalho aborda os campos de vetores conformes (ou simplesmente, campos conformes) definidos em um subconjunto aberto do espaço Euclidiano, destacando as relações dos referidos campos de vetores com as funções complexas holomorfas definidas em subconjuntos abertos dos números complexos. Os campos conformes em um espaço Riemanniano são campos de vetores suaves com derivada de Lie dada por um tensor múltiplo da métrica Riemanniana do espaço supracitado, no entanto pode-se adotar uma definição mais elementar, que coincide com a definição geral (aplicada a espaços Riemannianos), quando restrita ao espaço Euclidiano. Convém salientar que os campos conformes aparecem no estudo de algumas estruturas geométricas, tais como os solitons de Ricci, os quase solitons de Ricci, variedades quasi-Einstein e solitons de Yamabe.

Palavras-chave: Espaço Euclidiano Campos Conformes Funções Holomorfas .

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, larissa.fernandes1234545@gmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, joaofilho@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

Conforme mencionado no resumo, um campo conforme definido sobre um espaço Riemanniano é um campo de vetores suave, cuja derivada de Lie da métrica em sua direção é dada por um tensor de segunda ordem que é múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço. Por analogia ás aplicações conformes (aplicações que preservam ângulo), tais campos de vetores suaves são assim designados. Os campos conformes correspondem a uma generalização natural dos campos de Killing e dos campos de vetores homotéticos, visto que os campos de Killing são campos conformes com fator conforme identicamente nulo, enquanto os campos de vetores homotéticos são campos conformes com fator conforme constante.

Na geometria Riemanniana, observa-se que os campos conformes aparecem com relativa frequência, destacamos o estudo de imersões sobre formas espaciais (Espaço Euclidiano, esfera e espaço hiperbólico), produtos diretos, produtos de warped, espaços Riemannianos homogêneos, espaços Riemannianos de Einstein e em alguns fluxos geométricos (fluxo de Yamabe e Ricci). Alguns exemplos de campos conformes definidos sobre formas espaciais (Espaço Euclidiano, esfera e espaço hiperbólico) são construídos no trabalho de Heintze(1988). Estes campos de vetores também estão diretamente relacionados à curvatura escalar do espaço Riemanniano onde encontram-se definidos, como pode ser verificado nos artigos de Tashiro (1965) e Obata/Yano (1970).

No espaço Euclidiano podemos encontrar diversos exemplos de campos conforme dos tipos gradientes e não-gradientes, bem como seus casos particulares mais conhecidos que são os campos de Killing e os campos de vetores homotéticos (cf. Heintze, 1998). Nesse espaço, observa-se que as definições associadas a campos conformes tornam-se bem mais elementares que as usadas em espaços Riemannianos e podem ser relacionadas as funções complexas holomorfas, através da identificação do espaço euclidiano de dimensão 2 com o plano complexo, bem como uma identificação do espaço das funções complexas holomorfas com o conjunto dos campos de vetores conformes sobre o espaço euclidiano de dimensão 2. Mais informações sobre essa última identificação mencionada, podem ser conferidas em Manno e Metafune (2012) em contexto mais geral.

METODOLOGIA

Na execução das atividades previstas no nosso Projeto de Pesquisa, realizou-se inicialmente uma revisão bibliográfica para que fosse obtida uma certa familiaridade com o tema do projeto, bem como com as estruturas geométricas que seriam utilizadas no decorrer do estudo de campos conformes. Na sequência, foram estudados alguns livros, notas de aula, trabalhos de conclusão e artigos mais específicos relacionados à temática do trabalho para obter os pré-requisitos necessários ao estudo dos campos conformes no espaço Euclidiano.

Na etapa final do projeto, foram estudadas as principais relações entre as funções complexas holomorfas e os campos conformes definidos sobre o espaço Euclidiano, principalmente estabelecidas pelas condições de Cauchy-Riemann, que permitem fazer uma identificação entre os conjuntos formados pelas funções complexas holomorfas definidas em subconjuntos abertos dos complexos e pelos campos conformes definidos

ISSN: 2447-6161

em abertos do espaço Euclidiano de dimensão dois.

Essa identificação permite deduzir uma maneira mais simples de construir exemplos de campos conformes definidos no espaço Euclidiano, bem como exemplos de campos conformes definidos sobre quaisquer espaços Riemannianos conformemente Euclidianos. Deve-se ainda ressaltar que ao longo do projeto foram realizadas reuniões periódicas com o orientador para acompanhamento das atividades, esclarecimento de dúvidas, discussões sobre o conteúdo estudado, resolução de exercícios, elaboração de relatórios, etc.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Estudar os campos conformes nos permite obter ferramentas e recursos que podem ser aplicados em espaços Riemannianos, onde estes campos de vetores estão definidos, inclusive fornecendo informações sobre a curvatura escalar, conforme descrito por Tashiro (1965) e Obata/Yano (1970). No entanto, identificar a existência de campos conformes em um espaço Riemanniano ou construir exemplos nem sempre é tarefa simples, dada a complexidade da expressão que define derivada de Lie, que é usada para definir campos conformes.

Nesse sentido, estabelecendo a identificação entre o espaço das funções holomorfas definidas em subconjuntos abertos dos complexos e o conjunto dos campos conformes definidos em abertos do espaço Euclidiano de dimensão dois, pudemos concluir, através das condições de Cauchy-Riemann, que a partir de uma função complexa holomorfa é possível construir um campo conforme, de forma mais elementar e direta que usando a definição de campo conforme, devido à simplicidade na obtenção de exemplos de funções complexas holomorfas.

CONCLUSÕES

Diante das dificuldades presentes nas abordagens mais usuais de campos conformes e na construção de exemplos de campos conformes pela definição, usamos ferramentas mais elementares para verificar em campos conformes sobre o espaço Euclidiano, alguns dos resultados, presentes na literatura, sobre os campos conformes em espaços Riemannianos, de forma bem mais acessível a um aluno de Graduação. Finalmente, deve-se ressaltar a importância do estudo que realizamos sobre as relações, que possibilitaram fazer uma identificação dos campos de vetores conformes com as funções complexas holomorfas, proporcionando assim uma forma mais simples de construir campos conforme sobre abertos do espaço Euclidiano a partir de funções complexas holomorfas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica – BICT da FUNCAP pela concessão da bolsa durante a vigência do projeto, à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia

ISSN: 2447-6161

Afro-Brasileira – Unilab, à organização da VII Semana Universitária da Unilab, e ao evento pela oportunidade, bem como ao professor João Francisco pelas orientações.

REFERÊNCIAS

BESSE, A.L. Einstein manifolds. Berlin: Spring-Verlag, 2008. (Classics Mathematics).

BUENO, H. P. Álgebra Linear: Um Segundo Curso. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CARMO, M. P. do Geometria Riemanniana. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).

CASE, J.; SHU Y.; WEI, S. Rigity of quasi-Einstein metrics. Differential Geometry and its Applications, v. 29. p. 93-100, 2010.

CHEEGER, J.; GROMOLL, D. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. Journal of Differential Geometry, v. 6. p. 119-128, 1971.

CHEEGER, J. and COLDING, T. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. Annals of Mathematics, v. 144, (1996) no. 1. p. 189-237.

CHOW, B.; LU, P.; NI, L. Hamilton's Ricci Flow. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics, v. 77).

GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo- Volume 3. 5. Ed. São Paulo: LTC, 2011.

HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ1. Mathematisches. Annalen, v. 280. p. 389-402, 1988.

LEE, J. M. Introduction to smooth manifolds. New York: Springer-Verlag, 2002. (New Yourk Graduate Texts in Mathematics, v. 218.)

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. LIMA, E. L. Curso de Análise – Volume 2. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LINS NETO, A. Funções de uma Variável Complexa. 2. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MANNO, G.; METAFUNE, G. On the extendability of conformal vector _elds of 2-dimensional manifolds. Differential Geometry and its Applications, v. 30. p. 365-369, 2012.

OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. Journal Differential Geometry, v. 4. p. 53-72, 1970.

SOARES, M. G. Cálculo em uma Variável Complexa. 5. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. Transactions of the American Mathematical Society, v. 117. p. 251-275, 1965.

YANO, K. Integral formulas in Riemannian geometry. New York: Marcel Dekker, 1970.

ISSN: 2447-6161

ISSN: 2447-6161