O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Aline Glivia Da Silva Santos[1]
Rafael Jorge Pontes Diógenes[2]

RESUMO

O projeto visou estudar algumas demonstrações do Problema Isoperimétrico, que é um dos problemas clássicos em Matemática, de maneira particular em Geometria, e atualmente ainda é objeto de estudo nas pesquisas. Este problema, nas quais demonstrações rigorosas foram difíceis de serem obtidas, consiste que é o círculo que engloba a maior área dentre todas as curvas fechadas com comprimento fixado. A busca pela solução do Problema Isoperimétrico pode ser feita de várias maneiras, como por exemplo, usando apenas geometria básica, ferramentas do Cálculo Diferencial, ou mesmo técnicas mais aprimoradas como as Séries de Fourier. Em geral, tem-se obtido as chamadas Desigualdades Isoperimétricas cuja igualdade ocorre na solução do Problema Isoperimétrico. O principal objetivo deste trabalho é analisar as várias demonstrações do Problema Isoperimétrico, de maneira particular as que envolvem Geometria Diferencial de Curvas. A metodologia consistiu em uma pesquisa bibliográfica e os resultados alcançados foram com relação as construções feitas no *software* Geogebra. Contudo, foi possível concluir que somente métodos modernos de demonstrações do problema fornecem uma prova formal que é o círculo que engloba a maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado.

Palavras-chave: Problema Isoperimétrico Geometria Diferencial Desigualdades Isoperimétricas Demonstrações .

UNILAB - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira , ICEN - Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, alineglivia@gmail.com[1]
UNILAB - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN - Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, faremos uma breve explanação acerca do Problema Isoperimétrico, que teve a sua origem na Grécia Antiga no século IX a.C, baseada em uma lenda, a Lenda de Dido, do poeta romano Virgílio. Porém, no século IV a.C já se encontrava abordagens do Problema Isoperimétrico, no caso, em textos gregos de Pappus ou Papo de Alexandria, um dos mais importantes matemáticos helenísticos da antiguidade. Entretanto, dentro deste período não havia indícios de uma prova formal para o problema. Apesar de não existirem provas formais na época, o reconhecimento do resultado do problema pode ter influenciado na organização de cidades durante a idade média, pois ao analisarmos alguns mapas da época de cidades como Paris (França) e Braga (Portugal), é nítido construções semicirculares ou circulares.

O problema pode ser formulado da seguinte forma: *Dado um comprimento L > 0, dentre todas as curvas do plano de comprimento L, qual que engloba a maior área?* Esse problema também possui uma versão dual, que é equivalente e consiste a: *Dada uma área A > 0, dentre todas as curvas que englobam esta área, qual tem menor perímetro?* A solução do problema é conhecida desde a antiguidade, o círculo. Uma primeira demonstração para o problema foi dada pelo matemático grego Zenodoro, onde as proposições atribuídas a Zenodoro aparecem na obra de Pappus de Alexandria. *Dentre as proposições demonstradas temos: De todos os polígonos regulares de mesmo perímetro, aquele que tem maior área é o que tem mais ângulos; O círculo é maior do que qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

No século XIX, surge os trabalhos de Jacob Steiner, no qual apresenta algumas demonstrações da propriedade isoperimétrica para o círculo. Assim como Zenodoro, Steiner ignorou o problema da existência de uma solução para o Problema Isoperimétrico. Porém, o erro não foi levado em consideração na época. O Problema Isoperimétrico obteve a primeira demonstração rigorosa com Weierstrass, que usa o Cálculo de Variações. Posteriormente, surgiram outras soluções como a de Hurwitz usando Série de Fourier, também foram apresentadas as soluções de Blaschke e Schmidt, no qual, ambos usaram Geometria Diferencial.

Além disso, este problema pode ser expresso através de uma desigualdade, denominada por Desigualdade Isoperimétrica, que pode ser formulada como: *Para o comprimento L de uma curva fechada e área A de uma região planar temos* $A \leq L^2/4\pi$, *com igualdade apenas para o círculo*. De fato, se L é um comprimento do círculo cujo raio é r, sabemos que $L=2\pi r$, então:

$$r=L/2\pi$$

E sua área é

ISSN: 2447-6161

$$A=\pi(L/2\pi)^2=L\hat{}2/4\pi.$$

Algumas das áreas da Matemática nas quais o Problema Isoperimétrico ainda é um campo ativo são: Geometria Diferencial, Geometria Discreta e Convexa, Probabilidade, Teoria de Espaços de Banach, Equações Diferenciais Parciais, Teoria Geométrica da Medida, entre outras áreas.

METODOLOGIA

Inicialmente foi feita uma pesquisa sobre as várias demonstrações existentes do Problema Isoperimétrico. As consultas dos materiais ocorreram a partir de indicações do orientador e por pesquisas relacionadas a literatura do Problema Isoperimétrico. Posteriormente foram selecionadas algumas demonstrações para serem estudadas, com isso foi dado início aos estudos de maneira particular ao Método das Reflexões, o Problema Isoperimétrico para polígonos, o Método dos Multiplicadores de Lagrange e depois ao Método pelo Teorema de Stokes.

Desse modo, a metodologia desenvolvida nas atividades realizadas consistiu, sobretudo, numa pesquisa bibliográfica, consultando livros e artigos científicos, como forma de comparar as abordagens encontradas nos artigos e conseguir obter conclusões precisas do Problema Isoperimétrico. Além disso, as orientações realizadas com o professor responsável pelo projeto facilitaram bastante a compreensão da literatura do problema.

Por fim, com base em levantamentos e revisões da literatura relacionada ao Problema Isoperimétrico foram realizados dois seminários para exposição de algumas das demonstrações. Por último, como uma forma de compreender ainda melhor o problema dando-lhe uma perspectiva visual, este problema foi trabalhado via Geogebra.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados alcançados são relacionados as construções no Geogebra que facilitaram a compreensão das demonstrações, gerando uma interação com as discussões realizadas durante as orientações tendo como consequência o aprofundamento no assunto. As principais construções foram com relação as demonstrações do Problema Isoperimétrico para quadriláteros. Na imagem abaixo, temos a visualização do teorema que consiste em: *De todos os quadriláteros com o perímetro dado, o quadrado tem a maior áre*a.

Imagem 1 – Representação do teorema: *De todos os quadriláteros com o perímetro dado, o quadrado tem a maior área.*

ISSN: 2447-6161

Fonte: Autora

Observe que no lado direito temos o gráfico de uma função que representa a área de acordo com o quadrilátero formado no lado esquerdo. Com o perímetro sendo 24, temos que o máximo da função será quando chegarmos ao quadrado, sendo 36 o valor máximo da área. Temos ainda uma construção com relação a Desigualdade Isoperimétrica.

Imagem 2 – Representação da Desigualdade Isoperimétrica: $A \leq L^2/4\pi$

Fonte: Autora

Contudo, as demonstrações mais difíceis de serem compreendidas foram as que se utilizam de Cálculo Diferencial e Geometria Diferencial de Curvas, pois continham ideias de teoremas que não são vistos na graduação com profundidade. São elas: Método dos Multiplicadores de Lagrange e o Método pelo Teorema de Stokes. Porém, as demonstrações mais tranquilas foram as que se utilizam de geometria básica.

CONCLUSÕES

Podemos afirmar que os estudos voltados as demonstrações do Problema Isoperimétrico mostram que somente métodos modernos fornecem uma prova formal que é o círculo que engloba a maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado. Isso porque, as primeiras demonstrações do Problema Isoperimétrico não possuem argumentos consistentes que o prove. O método de Steiner, por exemplo, possui argumentos engenhosos arquitetados de diferentes maneiras para provar o problema, porém não pode ser considerado uma prova completa e rigorosa do problema, já que supõe logo de início na demonstração a existência de uma solução para o Problema Isoperimétrico.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Rafael Diógenes por me proporcionar ter a experiência na iniciação cientifica e por me orientar tão pacientemente durante a vigência da bolsa.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico), pelo auxílio financeiro.

REFERÊNCIAS

CARMO, M.P. Geometria Diferencial de curvas e superfícies. 3ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.

ISSN: 2447-6161

FIGUEIREDO, D. G. Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana. Revista Matemática Universitária, 9/10, 69-108, 1989.

KLASER, Patrícia Kruse. TELICHEVESKY, Miriam. O problema isoperimétrico. IV Colóquio de Matemática da Região Sul. Rio Grande: FURG, 2016.

LIMBERGER, R. Abordagens do problema isoperimétrico. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Campinas, 2011.

MADEIRA, T. M. O Problema isoperimétrico clássico. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2005.

MALSKA, Nataliya. Figuras planas e seu mundo isoperimétrico. Universidade Federal do Rio Grande, 2018.

TENENBLAT, K. Introdução à geometria diferencial. São Paulo: Blucher, 2008.

ISSN: 2447-6161