SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM R^3

Douglas Vieira Lima[1]
Rafael Jorge Pontes Diógenes[2]

RESUMO

O presente projeto tem por objetivo apresentar o estudo realizado sobre superfícies mínimas no espaço. Uma superfície parametrizada regular é chamada mínima se sua curvatura média é identicamente nula. A abordagem do estudo sobre superfícies mínimas teve início com Joseph-Louis Lagrange (1760), sendo o primeiro a definir uma superfície mínima, onde ele obteve uma equação diferencial parcial que descrevia as superfícies mínimas que são gráficos de funções diferenciáveis. Em geometria diferencial, um dos assuntos mais trabalhados são problemas relacionados a superfícies mínimas. Ainda que Geometria Diferencial seja uma disciplina considerada básica, as superfícies mínimas ainda estão sendo investigadas, pois há ligações profundas com funções analíticas de variáveis complexas e com equações diferenciais parciais. Os resultados dessa teoria, em geral, são de fácil visualização e de difíceis provas. As superfícies mínimas são geralmente associadas às películas de sabão, que podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Tal superfície, em seus pontos regulares, tem a curvatura média nula. A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau, que, a grosso modo, pode ser descrito da seguinte maneira: provar que para cada curva fechada C em R^3 existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira. Tal problema, em sua forma mais simples, consiste em encontrar a superfície de menor área limitada por um contorno fechado no espaço.

Palavras-chave: Superfícies Mínimas Curvatura Média Problema de Plateau .

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, douglas.unilab@gmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, rafaeldiogenes@unilab.udu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

O interesse pelo estudo de problemas relacionados às superfícies mínimas surgiu no século XVIII com Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), onde em 1760 ele definiu pela primeira vez uma superfície mínima. A palavra mínima está relacionada com o seguinte problema proposto por Lagrange: Dada uma curva fechada C (sem auto interseções), achar a superfície de área mínima que tenha esta curva como fronteira.

Lagrange propôs esse problema com a finalidade de encontrar um método para minimizar certas quantidades como área, comprimento e energia. Tal método hoje em dia é conhecido como Cálculo das variações.

Em 1740 Euler descobriu uma superfície que apresentava para um dado volume a menor área superficial possível, essa superfície é conhecida como Catenóide. Ainda no século XVIII, o matemático francês J.B.M.C. Meusnier de la Place (1754-1793) descobriu uma superfície denominada Helicóide. A Helicóide, assim como a Catenóide de Euler, junto com o plano e a esfera, são denominados como os primeiros modelos identificados de superfícies mínimas.

O estudo detalhado das superfícies mínimas só teve início apenas no século XIX com o físico belga J. A. F. Plateau (1801-1883) no qual conduziu grandes pesquisas com base em bolhas de sabão. Tal problema, já conhecido por Lagrange e Euler, foi denominado Problema de Plateau, especificamente pelo sistema e forma experimental que foi utilizado por Plateau. O problema descrito de uma forma simples, consistia em encontrar a superfície de menor área limitada por um contorno fechado no espaço. Dessa forma, o físico belga realizava experiências mergulhando um contorno(feito de arame por exemplo) em um recipiente com água e sabão, de tal modo que ao retirar o contorno, podia-se obter uma superfície, que por alguns motivos físicos, é a superfície de menor área que se pode ser formada para o determinado contorno dado.

Dentro do estudo das superfícies mínimas ainda houve uma importante colaboração brasileira, onde o matemático Celso José da Costa, através dos estudos do matemático alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897), descobriu em 1982 uma nova superfície mínima denominada superfície Costa. Dada a importância desse trabalho, impactou na origem de uma série de pesquisas que resultaram na descoberta de novas superfícies, novos problemas matemáticos e teoremas. Além disso, a descoberta do brasileiro acabou influenciando em partes, o desenvolvimento da computação gráfica. Posteriormente, em 1998, ele recebeu do Ministério da Ciência e Tecnologia a medalha “Ordem do Mérito Científico na classe de Comendador, em vista da qualidade destes resultados obtidos anteriormente.

Levando em conta os conceitos abordados no estudo das superfícies mínimas, nosso principal objetivo é entender e investigar as superfícies mínimas que são soluções do Problema de Plateau. Além de descrever as superfícies mínimas já existentes e as caracterizações de como ocorrem com superfícies de revolução e regradas que são superfícies mínimas, utilizando-se do software GeoGebra como recurso computacional auxiliar para uma visualização bem mais dinâmica. Nesse caso, o GeoGebra pode se constituir de uma ferramenta auxiliar indispensável, não somente na resolução, mas também no estudo desses sólidos tendo em vista a caracterização dessas superfícies.

METODOLOGIA

Iniciamos nossas atividades no projeto com um estudo focado na aquisição dos pré-requisitos necessários para então começar os estudos sobre superfícies mínimas, e consequentemente, obter um bom entendimento do problema. Começamos pelo estudo do livro de Geometria diferencial de curvas e superfícies do Manfredo

ISSN: 2447-6161

do Carmo e o livro de Introdução à geometria diferencial da Keti Tenenblat, para que então pudéssemos obter uma boa noção sobre geometria diferencial. Iniciaram-se os estudos sobre curvas, seguindo então para os estudos mais aprofundados sobre superfícies.

Iniciou-se então o estudo das superfícies mínimas, no qual uma superfície parametrizada regular é chamada “mínima” se a sua curvatura média é identicamente nula (H = 0).
Primeiramente procuramos entender matematicamente tal conceito, explorando e calculando alguns exemplos já conhecidos de superfícies mínimas como a Helicóide, Catenoite, Superfície de Scherk, de Enneper, entre outras. Onde mostramos de fato que a curvatura média de cada uma das superfícies é identicamente nula.
Em seguida, deu-se início ao estudo de propriedades importantes para compreender o problema de Plateau, onde investigamos alguns exemplos de superfícies mínimas que são solução do deste problema.

Em uma segunda etapa do projeto, iniciou-se o estudo do software Geogebra na busca de novas ferramentas para se trabalhar na construção das superfícies mínimas mais conhecidas. Além disso, também tentamos buscar ferramentas que pudesse nos ajudar na representação do problema variacional no Geogebra.

Por fim, depois de um longo trabalho, finalmente conseguimos mostrar em detalhes no Geogebra as principais características de formação da superfície mínima Helicóide, que é a única superfície mínima além do Plano, que é também uma superfície regrada, ou seja, que é formada por uma família de retas. E além da Helicóide, também conseguimos mostrar no software Geogebra as principais características de formação da superfície mínima Catenóide, no qual, é a única superfície de revolução que é mínima. É chamada superfície de revolução, uma superfície no espaço euclidiano criada pela rotação de uma curva (geratriz) em torno de um eixo de rotação.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Visando formas que possam nos auxiliar em uma visualização bem mais dinâmica das superfícies mínimas, conseguimos mostrar em detalhes através da criação de Applets no Geogebra as principais características de formação da superfície mínima Helicóide, que é a única superfície mínima além do Plano, que também é uma superfície regrada.

Figura 1: Superfície Mínima Helicóide

E além da Helicóide, também conseguimos mostrar no software Geogebra as principais características de formação da superfície mínima Catenóide, no qual, é a única superfície de revolução que é mínima.

Figura 2: Superfície Mínima Catenóide

CONCLUSÕES

Este projeto me proporcionou uma inserção na área da pesquisa científica na matemática, no qual pude adquirir uma boa maturidade sobre os conceitos básicos na área de Geometria Diferencial.

O estudo por meio do software GeoGebra envolvendo as superfícies mínimas foi bastante produtivo.

ISSN: 2447-6161

Observou-se que o software auxiliou fortemente no estudo de tal problema de maneira simplificada por meio da manipulação dinâmica da representação gráfica e na exploração das principais características das superfícies mínimas Helecóide e Catenóide.

Além disso, devido a seu leque de recursos e ferramentas, a utilização do Geogebra pode permitir aos observadores a visualização dos resultados obtidos, porém, de uma forma bem mais dinâmica e interativa.

Já no caso do problema da superfície mínima proposto por Plateau, pode-se perceber que sua resolução via interpretação gráfica com o auxílio do GeoGebra se constitui como uma valiosa ferramenta.

Além das superfícies Helicóide e Catenóide, esse projeto pode ser estendido no estudo de outras superfícies mínimas descritas nesse trabalho, como a superfície de Scherk, de Enneper, superfície Costa, dentre outras. No sentido de se procurar obter algumas características dessas superfícies através da visualização e interação no Geogebra.

Portanto, podemos concluir que o uso de um recurso auxiliar computacional como o Geogebra, pode facilitar no estudo dos conceitos matemáticos e na descrição das características das superfícies mínimas. Além de ser um fator essencial na construção do conhecimento, gerando várias possibilidades e perspectivas de explorações dentro do que se foi estudado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

Ao meu orientador Rafael Jorge Pontes Diógenes, pela oportunidade concedida na pesquisa de Iniciação Científica.

Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica (BICT) da Funcap, pela bolsa de estudos que possibilitou a dedicação no projeto e a operacionalização dos estudos.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção Textos Universitários).

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008.