CAMPOS DE VETORES CONFORMES SOBRE FORMAS ESPACIAIS

Manfinapul Armando Blez[1]
Joao Francisco Da Silva Filho[2]

RESUMO

O presente trabalho aborda os campos de vetores conformes (ou campos conformes) sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera e espaço Hiperbólico), destacando os campos de vetores conformes gradientes, campos de Killing e campos homotéticos. De modo geral, campos de vetores conformes sobre espaços Riemannianos são campos de vetores suaves, cuja derivada de Lie gera um tensor de ordem 2 (dois), múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço. Deve-se ressaltar que os campos conformes encontram-se em formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera e espaço hiperbólico), nas superfícies de revolução, nos espaços homogêneos, etc. Na perspectiva de estudar os campos de vetores conformes sobre formas espaciais, especialmente sobre o espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico, será usada uma abordagem bem mais elementar que a abordagem usual. Ademais, pretende-se verificar a relação entre os campos conformes gradientes no espaço Euclidiano com os campos vetores conformes gradientes sobre a esfera Euclidiana e sobre o espaço Hiperbólico, procurando comparar as suas respectivas propriedades em cada forma espacial, através de mudança conforme de métrica Riemanniana.

Palavras-chave: Formas espaciais Campos de vetores conformes Fator conforme .

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN, Discente, armandoblez@gmail.com[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, ICEN, Docente, joaofilho@unilab.edu.br[2]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

As formas espaciais (ou *space forms*) são espaços Riemannianos completos com curvatura seccional constante, cujos exemplos mais conhecidos são espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico. Os campos conformes sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores, cuja derivada de Lie resulta em um tensor de ordem 2 (dois), múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço. Os campos conformes constituem uma generalização dos campos de Killing e dos campos homotéticos, já que os campos de Killing são campos conformes com fator conforme nulo, enquanto os campos homotéticos são campos conformes com fator conforme constante.

Os campos de vetores conformes aparecem com bastante frequência na Geometria Diferencial, por exemplo, no estudo de imersões sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera e espaço Hiperbólico), nos produtos diretos, produtos-warped, espaços homogêneas, espaços de Einstein e ainda em alguns fluxos geométricos (fluxo de Yamabe e fluxo de Ricci).

Estes campos de vetores também estão relacionados à curvatura escalar do espaço Riemanniano, no qual estão definidos, conforme podemos conferir nos resultados obtidos por Tashiro (1965) e Obata/Yano (1970). Nas formas espaciais, encontram-se alguns exemplos, dentre eles destacam-se os exemplos construídos por Heintze (1988), partindo das chamadas funções suporte.

METODOLOGIA

Inicialmente, realizamos um estudo preliminar sobre alguns tópicos de Álgebra Linear, Cálculo Vetorial, Análise Real e elementos de Geometria Riemanniana, contemplando o período de aquisição dos pré-requisitos necessários. Na sequência dos trabalhos, passamos a nos concentrar no estudo dos campos de vetores conformes sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico), partindo do espaço Euclidiano e usando mudança conforme de métrica. Deve-se ressaltar que buscou-se utilizar as ferramentas mais elementares possíveis e apresentar uma abordagem mais simples.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme inicialmente planejado, construímos expressões que descrevem os campos de vetores conformes gradientes sobre formas espaciais simplesmente conexas (espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico), através da função potencial e do fator conforme (ou fator de conformidade), que são estruturas suficientes para gerar a expressão do campo de vetores correspondente.

Primeiramente, revisitamos a expressão que descreve os campos de vetores conformes gradientes sobre o espaço Euclidiano, através da função potencial e do fator conforme, verificando ainda que nesse espaço, tais campos de vetores são sempre homotéticos. Através de uma mudança conforme de métrica, obtemos ainda os quocientes de expressões polinomiais que descrevem os campos conformes gradientes na esfera Euclidiana e no espaço Hiperbólico, cujo número de variáveis coincide com a dimensão das referidas formas espaciais.

Por fim, foi realizado ainda um estudo mais aprofundado, revendo alguns resultados sobre campos conformes gradientes, que permitem caracterizar espaços Riemannianos, identificando em que condições pode-se

ISSN: 2447-6161

concluir que um espaço Riemanniano possui a mesma geometria do espaço Euclidiano, da esfera Euclidiana ou do espaço Hiperbólico.

CONCLUSÕES

Diante do estudo realizado e do trabalho desenvolvido ao longo do período de vigência do projeto, deduzimos expressões gerais que permitem descrever as funções potenciais de qualquer campo de vetores conforme gradientes sobre formas espaciais simplesmente conexas (espaço Euclidiano, esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico). Estas expressões consistem de um quociente de expressões polinomiais, cujo número de variáveis coincide com as dimensões das referidas formas espaciais. Deve-se ainda ressaltar a estreita relação entre as expressões dos campos de vetores conformes gradientes entre cada uma das referidas formas espaciais, estabelecida através de mudança conforme de métrica Riemanniana.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira PIBIC/UNILAB, pelo suporte financeiro que possibilitou a realização do projeto “Campos de Vetores Conformes Sobre Formas Espaciais”.

REFERÊNCIAS

BESSE, A. L. Einstein Manifolds. Berlin: Spring-Verlag, 2008. (Classics Mathematics)

CARMO, M. P. Geometria Riemanniana, 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides)

CHEEGER, J.; GROMOLL, D. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. Journal of Differential Geometry, v. 6, p. 119-128, 1971.

CHEEGER, J. and COLDING, T. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. Annals of Mathematics, v. 144, (1996) no. 1, p. 189-237.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo - Volume 3, 5ª Edição. Rio de janeiro: LTC, 2002.

HAMILTON, R. S. The Ricci flow in dimension three. Journal Diferential Geometry, v. 17, p. 255-306, 1982.

HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ_1. Mathematisches Annalen, v. 280, p. 389 - 402, 1998.

LIMA, E. L. Análise Real – Volume 2: Funções de n variáveis, 6ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

ISSN: 2447-6161

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 10ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

OBATA, M.; Yano, K. Conformal Changes of Riemannians Metrics. Journal Diferential Geometry, v. 4, p. 53 - 72, 1970.

OLIVEIRA, F.; PEREIRA, O.; SILVA, M. B.; SILVA FILHO, J. Campos Conformes sobre o Espaço Hiperbólico. Acarape, 2018 (Artigo Submetido).

O'NEILL, B. Semi-Rimannian Geometry with applications to relativity. New York: Academic Press, 1983.

PETERSEN, P.; WYLIE. W. On gradient Ricci Solitons with symmetry. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 137, p. 2085-2092, 2009.

SILVA FILHO, J. F. Solitons de Ricci e Métricas quasi-Einstein em Variedades Homogêneas. 2013, 83 f. Tese (Doutorado) - Pós- Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

SILVA, M. B.; SILVA Filho, J. F. Um problema interessante sobre congruência de triângulos. Revista do Professor de Matemática, v. 93, p. 42-44, 2017.

SILVA Filho, J. F. Quasi-Einstein manifolds endowed with a parallel vector Field. Fortaleza, 2015. Monatshefte fur Mathematik, v. 178 (2015). p. 01-16.

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. Transactions of the American Mathematical Society, v. 117, p. 251-275, 1965.

ISSN: 2447-6161