SOBRE A CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS EM VARIEDADES COM O LEMA DE MORSE

Sharmenya Jany Andrade Correia De Sousa[1]
Joserlan Perote Da Silva[2]

RESUMO

Este trabalho é o resultado da participação no Programa de Iniciação Científica (PIBIC) da UNILAB no projeto "Singularidades de Aplicações Diferenciáveis" sob a orientação do Prof. Joserlan Perote da Silva vinculado ao Curso de Licenciatura em Matemática. A Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis é um ramo da Matemática Pura que busca, entre outras coisas, fazer extensões do estudo feito inicialmente no Cálculo Diferencial e Integral, de funções, tentando estudar as eventuais singularidades presentes em aplicações diferenciáveis e obtendo informações locais nas proximidades de uma singularidade. Nesse texto, com o uso de Lema de Morse, visando obter informações mais precisas sobre os pontos críticos de aplicações definidas sobre variedades, buscamos classificá-los de acordo com determinadas propriedades já conhecidas da teoria de pontos críticos e além disso, realizar as devidas interpretações geométricas dos resultados obtidos, observando quando ocorre ocorrência de ponto de mínimo local, ponto de máximo local e ponto de sela e relacionando essa ocorrência com o sinal da matriz Hessiana enquanto aplicação bilinear, o que já é feito usualmente.

Palavras-chave: Variedades Lema de Morse Pontos Críticos Não-Degenerados .

UNILAB, ICEN, Discente, sharmenya.andrade@gmail.com[1]
UNILAB, ICEN, Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[2]

INTRODUÇÃO

A Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis é um ramo da Matemática Pura que busca, entre outras coisas, fazer extensões do estudo feito inicialmente no Cálculo Diferencial e Integral, de funções. Este trabalho é o resultado da participação no Programa de Iniciação Científica da UNILAB, no projeto "Singularidades de Aplicações Diferenciáveis".

Nosso objetivo inicial era utilizar o Lema de Morse para classificar os pontos críticos de funções reais e a seguir generalizar o referido lema para fazer este mesmo estudo para funções definidas sobre variedades. Mais especificamente, o Lema de Morse nos diz que nas proximidades de um ponto crítico não-degenerado podemos encontrar coordenadas locais tais que a função se comporte de maneira quadrática.

METODOLOGIA

Para o desenvolvimento de nossas atividades, realizou-se inicialmente uma revisão bibliográfica para que houvesse uma familiaridade com o tema do projeto. A seguir, foram estudados alguns artigos mais específicos sobre a temática do trabalho e então demonstramos o Lema de Morse para funções reais e o utilizamos para classificar os pontos críticos de tais funções. Posteriormente, buscou-se generalizar o estudo para funções definidas sobre variedades.

Naturalmente, como queremos obter uma versão do Lema de Morse para funções definidas em variedades, faz-se necessário entender o que é uma variedade.

Definição: Uma variedade de dimensão m e de classe C^∞ é um par $(M,[A])$, onde M é um espaço de Hausdorff e $[A]$ é uma classe de equivalência de dimensão m e classe C^∞, a qual é chamada de estrutura diferenciável de $(M,[A])$.

Em funções reais, definimos um ponto crítico como um ponto que anula o gradiente de uma função. Para funções definidas sobre variedades, a ideia é a mesma:

Definição: Seja M uma variedade de dimensão m e de classe C^∞ e $f: M \to R$ uma função suave. Um ponto $p \in M$ é dito crítico se a aplicação diferencial $df_p : T_pM \to R$ é nula, onde T_pM é o espaço tangente à M em p.

Nosso enfoque de estudo se situa nos pontos críticos não-degenerados, isto é, nos pontos críticos que não anulam a matriz Hessiana de f. Considerando os pontos críticos não-degenerados, definimos como índice de p em f o número inteiro k tal

ISSN: 2447-6161

que k é a maior dimensão de um subespaço vetorial de R^m tal que a restrição de *Hess(f)*$_p$ a este subespaço é negativa definida.

Com base no que foi estudado, partimos para o Lema de Morse, o qual nos mostra que na vizinhança de um ponto crítico, uma função definida sobre uma variedade tem comportamento quadrático.

Teorema : (Lema de Morse) Seja M uma variedade de dimensão m e $p \in M$ um ponto crítico não degenerado de uma função suave $f: M \to R$. Então existe um carta (V,φ), com $\varphi(0)=p$, tal que:

$$(f\circ\varphi)(x_1,x_2,\dots,x_m) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_m^2$$

onde k é o índice de f em p. Tal carta é chamada de carta de Morse.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Quando trabalhamos com funções reais, utilizamos a matriz Hessiana para classificar os pontos críticos não-degenerados. Caso a Hessiana seja positiva definida, dizemos que o ponto é um mínimo local, caso a Hessiana seja negativa definida, dizemos que o ponto é um máximo local e caso nenhum desses casos ocorra, o ponto é chamado de sela. Para funções definidas em variedades não é diferente, no entanto o Lema de Morse facilita nosso trabalho quanto a isso.

Pelo Lema de Morse, se p é um ponto crítico com índice $k = 0$, então numa vizinhança de p, temos:

Ou seja, p é um ponto de mínimo local, o que é esperado, pois se o índice de p é zero, então a matriz Hessiana de f em p é positiva definida.

De modo análogo, se p é um ponto crítico com índice $k = m$, então numa vizinhança de p, temos:

Ou seja, p é um ponto de máximo local, o que é esperado, pois se o índice de p é m, então a matriz Hessiana de f em p é negativa definida.

E, por fim, se p é um ponto crítico com índice *0 , então em alguma vizinhança de p, temos:*

Ou seja, p é um ponto de sela, o que é esperado, pois se o índice de p satisfaz *0 , então a matriz Hessiana de f em p não é nem positiva definida e nem negativa definida.*

CONCLUSÕES

ISSN: 2447-6161

Saliento a importância do trabalho para a minha evolução enquanto estudante de matemática, pois ele possibilitou uma maior compreensão do meio científico e me proporcionou uma maior apropriação de novos conceitos matemáticos, permitindo que as minhas noções dos conteúdos de Cálculo fossem aprimorados conforme se desenvolvia os estudos na bolsa.

Com respeito ao trabalho, enfatizamos a importância do Lema de Morse, pois ele permitiu classificar os pontos críticos não-degenerados de funções definidas sobre variedades diferenciáveis, nos fornecendo assim, uma ferramenta interessante para estudar essa classe de pontos, os quais tem aplicações em diversas áreas da Matemática e das Ciências Exatas em geral.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à UNILAB pela concessão da bolsa que viabilizou o projeto e ao Prof. Joserlan Perote da Silva pelas orientações.

REFERÊNCIAS

SAIA, Marcelo José. **Uma introdução à teoria de Singularidades**. São Carlos: ICMC - USP, 2011.

LIMA, Elon Lages. **Variedades diferenciáveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

FIGUEIREDO, Danuzia Nascimento. **Teoria de Morse** (Dissertação de Mestrado - 126p). Salvador: UFBA, 2018.

TOGNON, Carlos Henrique; NOGUEIRA, Antônio Carlos. **Uma introdução à Teoria de Pontos Críticos**. FAMAT em revista, n.9. Uberlândia: UFU, 2007, pp. 13-24.

ISSN: 2447-6161