CAMPO DE VETORES CONFORME FECHADO EM SUPERFÍCIES DO R³

Antonio Luan Da Silva Pereira[1]
João Francisco Da Silva Filho[2]
Rafael Jorge Pontes Diógenes[3]

RESUMO

O presente trabalho estuda as superfícies diferenciáveis no espaço Euclidiano tridimensional que possuem campos de vetores conforme fechado. Um campo de vetores é conforme fechado se a derivada covariante do campo conforme na direção de qualquer vetor tangente é múltiplo deste vetor. O problema concentra-se em descrever completamente um campo de vetores conforme fechado em uma superfície, de maneira particular nas superfícies de revolução. Utilizando-se a estrutura fornecida pelas superfícies de revolução, bem como pelas equações que um campo de vetores conforme fechado carregam, e por meio de Equações Diferenciais parciais e ordinárias das funções que parametrizam tal superfície descreve-se o campo em termos da parametrização. Mais precisamente, mostra-se que em tais superfícies temos apenas dois casos, onde um deles é um exemplo clássico de campos de vetores conforme fechado, o outro obriga necessariamente a superfície de revolução ter curvatura constante, assim, nesse último, além de descrever o campo é possível classificar a superfície de revolução. Em particular, se a superfície de revolução não tem curvatura constante, então temos apenas um tipo de campo conforme fechado.

Palavras-chave: CAMPO DE VETORES SUPERFÍCIES CONFORME FECHADO .

UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA, Discente, luannsilvap@gmail.com[1]
UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA, Docente, joaofilho@unilab.edu.br[2]
UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br[3]

INTRODUÇÃO

Seja S uma superfícies no espaço Euclidiano R^3, dizemos que um campo de vetores (suave) X é conforme fechado se

(1) $D_Y X=\psi Y$

para todo $Y\in X(M)$ (Espaço dos campo de vetores suaves de S), onde D_Y denota a derivada covariante na direção do campo Y, isto é, a projeção sobre o plano tangente a S da derivada usual do R^3. Nesse caso X ser fechado é uma alusão ao fato de que sua 1−forma metricamente dual ω é fechada. Um campo conforme fechado X é dito paralelo se ψ é identicamente nulo e homotético se ψ for uma constante não nula.

Por exemplo, na esfera, o campo de vetores tangentes as geodésicas geradas pelos grandes círculos é um exemplo de campo conforme fechado. Se considerarmos a superfície de revolução gerada pela rotação da curva $\alpha(t)=(f(t),0,g(t))$ em torno do eixo y, podemos obter a parametrização $x(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\operatorname{sen} v,g(u))$ e tomando $X=fx_u$, temos que X é um campo conforme fechado.

Obter resultados de classificações ou caracterizações são problemas bastantes interessantes em geometria diferencial. Esse tipo de problema já vem sendo estudado a vários anos por AMUR (1974), DESHMUKH (2008), OBATA (1970), TANNO e WEBER (1969) e TASHIRO (1965), onde os autores buscaram em geral caracterizar a esfera a partir de variedades com campo conforme. Vale destacar um resultado bastante interessante e muito famoso: o Teorema de Obata (1962), que diz que se existe uma função f em uma variedade Riemanniana completa e conexa tal que $D_X \operatorname{grad} f=-cfX$, onde c é uma constante positiva, então a variedade é isométrica a uma esfera. Neste caso, grad f é um campo conforme fechado gradiente.

No estudo dos campos de vetores conforme fechado em um superfície de revolução usamos a estrutura do espaço Euclidiano tridimensional para determinar ou caracterizar tais campos. Esse tipo de abordagem não é muito comum, pois ao contrário do objetivo discutido acima, agora estamos querendo determinar como é o campo conforme partindo de uma superfície conhecida.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada foi experimental, onde partimos da hipótese de um campo de vetores conforme fechado sobre uma superfície de revolução (esse campo sempre existe), e a partir desse campo conforme arbitrário, utilizamos a derivada covariante para determinar expressões para as derivadas parciais das funções componente do campo com relação a uma base ortonormal e para as funções que parametrizam a superfície. Em seguida, fazendo uso de resultados da Geometria Diferencial, determinamos expressões para as derivadas parciais de segunda ordem das funções componente do campo. A partir dos sistemas de equações diferenciais encontrados, consideramos os casos possíveis, sendo um deles que a curvatura Gaussiana seja constante. Em cada caso, obtemos expressões descrevendo o campo de vetores conforme sobre a superfície de revolução.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dada uma superfície de revolução arbitrária S, determinamos todos os campos de vetores conforme fechado sobre S, sendo estes divididos em dois casos. No primeiro caso mostramos que o campo é como descrito na introdução. No outro caso temos a curvatura Gaussiana constante e de maneira geral é possível determinar o campo a partir da curvatura.

ISSN: 2447-6161

O resultado obtido é bastante importante, pois descreve completamente um campo de vetores conforme fechado em uma superfície de revolução. Além disso, mostra que para as superfícies de revolução de curvatura Gaussiana não constante só existe apenas um tipo de campo conforme fechado.
Ademais, a técnica usada para obtenção da descrição do campo não se encontra com bastante familiaridade na literatura.

CONCLUSÕES

O projeto de Iniciação Científica, além de iniciar o bolsista para a ambientação acadêmica, trouxe resultados novos, que não são encontrados na literatura de Geometria Diferencial no espaço Euclidiano. Algumas noções usadas na pesquisa eram encontradas apenas na linguagem de Geometria Riemanniana, mas neste trabalho forma usados apenas linguagem da geometria diferencial no espaço Euclidiano, trazendo assim grandes contribuições.

AGRADECIMENTOS

O bolsista agradece à UNILAB pelo apoio financeiro durante a vigência do projeto.

REFERÊNCIAS

AMUR, K. Conformality of Riemannian manifolds to spheres. J. Diff. Geom. 9, 571 576, 1974.

CARMO, M. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção Textos Universitários).

DESHMUNKH, S. Conformal gradient vector fields on a compact Riemannian manifold. Colloquium Math. 112 (1), 157-161, 2008.

OBATA, M. Conformal transformationsof Riemannian manifolds. J. Diff. Geom. 4, 311-333, 1970.

TANNO, S.; WEBER, W. Closed conformal vector fields. J. Diff. Geom. 3, 361-366, 1969.

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. Trans. Am. Math. Soc. 117, 251-275, 1965.

TENENBLAT, K. Introdução à geometria diferencial. São Paulo: Blucher, 2008