CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS DEGENERADOS VIA SPLITTING LEMMA

Alan Barros Da Silva[1]
Marcelo Henrique Felix Da Silva[2]
Joserlan Perote Da Silva[3]

RESUMO

O presente trabalho trata-se de conceitos referentes à Classificação de Pontos Críticos não Degenerados via Splitting Lemma, que foi desenvolvido durante um projeto de iniciação cientifica UNILAB-PIBIC/UNILAB, intitulado de Singularidades de Aplicações Diferenciáveis. Neste trabalho iremos apresentar um pouco sobre a Teoria das Singularidades de Aplicações Diferenciáveis, que é descendente direto de Cálculo Diferencial, é uma vasta extensão de funções em pontos de máximo e mínimo. Esta área de estudo é de vasto tamanho, como muitas outras da matemática, por isso iremos trabalhar especificamente focando em um. Como já foi dito anteriormente, ela é descendente de Calculo Integral, então quando estudamos as funções, vamos focar em seus pontos críticos (ou seja, onde a primeira derivada será igual à zero).

Então em nossos estudos, focamos na classificação de pontos críticos de funções diferenciáveis. Os pontos críticos podem ser degenerados e não degenerados. Os não degenerados são completamente classificados pelo Lema de Morse, já os degenerados os quais trabalhamos nessa apresentação será classificado utilizando um resultado conhecido como Splitting lemma, a qual nos permite classificar os pontos críticos degenerados estudando-se uma função $f{:}R^n \to R$ envolvendo um número de variáveis menor (igual a n-r: este número é chamado o coposto (ou corank) de f).

Palavras-chave: Pontos Críticos Splitting Lemma Teoria de Singularidades .

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, alan_barros@aluno.unilab.edu.br[1]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, marcelohenrique.auto1@gmail.com[2]
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, joserlanperote@unilab.edu.br[3]

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

Mas o que é Singularidades? Esta questão é natural no estudo de funções reais a uma variável (no curso de cálculo 1), onde é visto como descrever estas funções a parir dos seus pontos críticos, que são aqueles onde a primeira derivada se anula. Então seja $f:R^n \rightarrow R$ uma função de classe C^∞, isto é, uma função que possui derivada de todas as ordens e cada uma dessas derivadas é uma função contínua. Um ponto $u \in R^n$ é dito um ponto crítico de f se as derivadas parciais de f se anulam em U. Isto é:

Geometricamente, pontos críticos ocorrem quando o gráfico de f possui uma tangente horizontal. Os pontos críticos não degenerados são completamente classificados pelo Lema de Morse.

Lema de Morse: Seja $u \in R^n$ um ponto crítico não degenerado da função $f:R^n \rightarrow R$ de classe C^∞. Então existe uma mudança de coordenada ψ em R^n, isto é, uma função $\psi:U \rightarrow R^n$, onde U é uma vizinhança do ponto u, tal que a função $fo\psi:U \rightarrow R$ é dada por, $fo\psi(u)=f(u)-y_1^2-...-y_1^2+y_{l+1}^2+...+y_n^2$, para todo $y=(y_1,y_2,...,y_n) \in U, 1 \leq l \leq n$.

Quanto aos pontos críticos degenerados, a situação é diferente. Situação a qual descrevermos na metodologia da nossa apresentação.

METODOLOGIA

Os pontos críticos não degenerados são completamente classificados pelo Lema de Morse. Quanto aos pontos críticos degenerados, a situação é diferente. Apresentaremos aqui o estudo dos pontos críticos degenerados no caso mais simples, ou seja, de uma função $f:R \rightarrow R$. Assume-se que f tem um ponto crítico na origem e que $f(0)=0$. Desta maneira, deve-se ter $f'(0)=0$.

Pelo que foi visto, a origem é ponto crítico não degenerado da função $f:R \rightarrow R$ se, e somente se, $f''(0) \neq 0$, uma vez que $Hess(f)_0=f''(0)$.

Entretanto, se $f''(0)=0$, obtém-se uma classificação mais refinada tomando se mais termos da série de Taylor de f. Esta classificação, porém, não diz nada sobre funções tais como $e^{(-1/x^2)}$ para as quais a série de Taylor é zero.

Note: Considere a função $f:R \rightarrow R$ dada por $f(x)= e^{(-1/x^2)}$ se, $x \neq 0$ e $f(x)=0$ se, $x=0$.

Expandindo esta função em série de Taylor em torno do ponto x=0 obtém-se que todos os termos da expansão são iguais à zero, visto que qualquer derivada da função f no ponto x=0 é igual à zero (a função f definida desta forma é conhecida como função chata). Por esta razão se diz que a série de Taylor desta função f é zero.

ISSN: 2447-6161

Teorema: Seja f:R→R uma função de classe C^∞, tal que $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(k-1)}(0)=0$, mas $f^{(k)}(0)\neq 0$. Então existe uma mudança de coordenadas sob a qual f toma a forma x^k, se k é ímpar, e x^k ou $-x^k$, se k é par.

O Lema de Morse e o teorema acima motivam uma importante noção.

Definição: Sejam $u_1 \in R^n$, $u_2 \in R^n$, $U_1 \subset R^n$, $U_2 \subset R^n$ onde U_1, U_2 são vizinhanças dos pontos u_1, u_2, respectivamente. Diz-se que $f_1: U_1 \to R$ e $f_2: U_2 \to R$ são funções R-equivalentes se existem vizinhanças $V_i \subset U_i$, com $u_i \in U_i$, i=1,2, um difeomorfismo $h: V_1 \to V_2$ e uma constante $c \in R$ tal que $h(u_1)=u_2$ e $f_1(u)=f_2(h(u))+c$, $\forall u \in V_1$.

Note: Seja $u_0 \in R^n$. Então $f: (R^n, u_0) \longrightarrow R$ denota uma função definida em alguma vizinhança de de u_0. Duas tais funções são equivalentes se elas coincidem em alguma vizinhaça de u_0.

A sentença, $f \approx g \Leftrightarrow$ as funções f e g coincidem em uma vizinhança de u_0, é uma relação de equivalência (é reflexiva, simétrica e transitiva).

As funções que se relacionam com f segundo ≈, formam uma classe de equivalência que é chamada um germe de f em u_0.

Definição: Suponha que $f: (R,t_0) \to R$ seja A - equivalente a $\pm x^{(k+1)}$. Então, para k≥0, dizemos que f tem tipo A_k em t_0, ou uma A_k singularidade em t_0.

Por exemplo, tipo A_0 significa simplesmente que $f'(t_0)\neq 0$.

Um dos problemas centrais na Teoria de Singularidades é classificar funções segundo R - equivalência. Um exemplo disto já foi feito no Lema de Morse, onde uma função f definida em uma vizinhança de um ponto crítico não degenerado é R - equivalente à função g dada por $g= -y_1^2-\ldots- y_1^2+y_{l+1}^2+\ldots+y_n^2$.

No Teorema acima, se tem que uma função f:R→R com série de Taylor não nula é equivalente a $\pm x^k$ para algum k.
Como existe o Lema de Morse para pontos críticos não degenerados, também se tem um resultado para os pontos críticos degenerados, que permite encontrar formas normais para uma função f em uma vizinhança de tal ponto em dimensões maiores que 1. Este resultado é conhecido como Splitting lemma e é enunciado a seguir.

Teorema (Splitting lemma): Seja $f:R^n \to R$ uma função de classe C^∞, com derivadas parciais de primeira ordem iguais a zero na origem e cuja matriz
Hessiana na origem tem posto r. Então f é R - equivalente, na origem, a uma função da forma

ISSN: 2447-6161

$\pm x^2 \pm \ldots \pm x^r + g(x_{r+1},\ldots,x_n)$, onde g: $R^{(n-r)} \rightarrow R$ é uma função de classe C^∞.

Este teorema mostra que o comportamento de uma função próximo a um ponto crítico degenerado pode ser determinado estudando-se uma função envolvendo um número de variáveis menor (igual a n - r : este número é chamado o coposto (ou corank) de f). Esta redução do número de variáveis é que torna o Splitting lemma tão útil e surpreendente.

Exemplo: Seja uma função $f:R^2 \rightarrow R$, com a origem sendo um ponto crítico degenerado; sob certas condições pode-se mostrar com o auxílio do Splitting lemma, que esta função é R - equivalente a uma das seguintes formas normais:

$(x,y) \mapsto x^3 - xy^2$ umbílico elíptico;

$(x,y) \mapsto x^3 + y^3$ umbílico hiperbólico;

$(x,y) \mapsto x^2 y + y^4$ umbílico parabólico.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através de nossos estudos, podemos observar que o Splitting Lemma, junto com o uso da matriz Hessiana, é uma grande ferramenta, pois conseguimos estudar o comportamento de funções próximas a pontos críticos degenerados, apenas estudando funções com um número menor de variáveis.
Com o projeto foi possível demonstrarmos uma das ferramentas mais importantes para utilizamos em pontos críticos degenerados, fazendo com que nosso trabalho tivesse um importante papel para todo aquele que se interessa em estudar tais assuntos.

CONCLUSÕES

O referido trabalho proporcionou ao bolsista uma inserção na vida científica da matemática, podendo compreender os conceitos básicos da Teoria das Singularidades.

O Splitting Lemma, nos mostra de uma forma bem mais clara de como podemos estudar o comportamento de uma função próximo a um ponto crítico degenerado, apenas estudando uma função com um número de variáveis menor.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus por tudo, em segundo lugar vem minha família por todo apoio que me proporcionaram e principalmente minha mãe por tudo que ela fez e tem feito. Depois quero agradecer duas pessoas em especial por terem me ajudado financeiramente para eu poder conseguir me sustentar dentro da universidade. E também agradecer minha namorada por todo apoio que ela me proporcionou. E também agradecer ao meu orientador Joserlan Perote da Silva, por essa oportunidade de iniciar na pesquisa

ISSN: 2447-6161

e também a UNILAB e ao CNPq, pela bolsa de estudo. E ao meu colega de pesquisa Marcelo Henrique Felix da Silva.

REFERÊNCIAS

[1] Sterwalt, James; Cálculo, Volume I; Editora Trilha [Tradução EZ2 Translate] – São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[2] Sterwalt, James; Cálculo, Volume II; Editora Trilha [Tradução EZ2 Translate] – São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[3] José, Marcelo. Uma Introdução à Teoria de Singularidades, São Carlos SP, Abril de 2011.

[4] Henrique, Carlos e Carlos, Antônio. FAMAT em Revista – Número 09, Uma Introdução à Teoria de Pontos Críticos, Outubro de 2007.