INTRODUÇÃO AO ESTUDO MÉTRICO DAS SUPERFÍCIES REGRADAS

Marinaldo Braga da Silva [1], Rodrigo Mendes Pereira [2]

RESUMO

O projeto foi iniciado com os pré-requisitos necessários para que se possa trabalhar nos tópicos específicos da pesquisa. Tais pré-requisitos foram: Estudo das aplicações contínuas; conceitos básicos de topologia em espaços euclidianos; Espaços métricos e normados (propriedades); funções analíticas e séries de Taylor; Cálculo diferencial sobre funções vetoriais e funções de várias variáveis. Nesse último, destacamos os famosos teoremas da função implícita e inversa, amplamente usado em Matemática, mais precisamente quando se trabalha em Geometria, Análise e Teoria das Singularidades. Na etapa seguinte, procuramos estabelecer um critério completo que detecta quando duas curvas analíticas são metricamente equivalentes a uma reta (esse resultado já foi estabilizado em [2]),mas se fez necessário para inserção e solidificação honesta para o estudo métrico de superfícies em espaços euclidianos. Apos isso, estudamos as obstruções de mergulho lipschitz normal sobre superfícies de revolução, e investigamos seu cone tangente. Em seguida, prosseguimos com o estudo métrico dos triângulos de holder e finalmente focamos considerando as superfícies regradas, definidas por um par de curvas a 1-parâmetro: X(t,s)= alfa(t)+sw(t), onde a curva w é tal que para cada t_o que pertence ao domínio tem-se uma reta passando por alfa(t_o). Iniciemos nossa investigação sobre superfícies que admitem parametrizações de posto 1. A categoria analítica é motivada pelo estudo da geometria algébrica. Tal geometria possui forte estabilidade do ponto de vista algorítmico e computacional e fornece uma gama ampla de exemplos e estruturas interessantes sobre o campo da geometria Riemanniana, topologia diferencial em conjunto com a teoria de singularidades. Nossa abordagem sobre tal estrutura é, essencialmente, do ponto de vista métrico. No estudo métrico (ou Lipschitz) das superfícies, foi estabelecido condições completas de equivalência métrica para cilindros e cones generalizados a partir de curvas geratrizes nas superfícies regradas. Este tópico é algo novo que permitirá ao estudante em conjunto com o orientador produzir artigos de bom nível considerando avaliação Qualis-Capes.

Palavras-chave:

Superfícies reais. Geometria métrica. singularidades. Cone tangente.

[1] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira., Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, e-mail: marinaldobraga37@gmail.com
[2] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira., Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, e-mail: rodrigomendes@unilab.edu.br

INTRODUÇÃO

Seja X uma superfície contida no espaço euclidiano R^4. Podemos considerar 2 distâncias em X. A 1º distância é obtida considerando a distância induzida do ambiente: Dados x e y pontos em X, temos que a distância entre x e y é o comprimento do segmento que tem x e y como extremos. A 2o distância é obtida considerando o menor dos comprimentos de curvas em X que conecta x e y (dita distância intrínseca). Essas distâncias fornecem em X duas estruturas de espaços métricos. Investigar como esses dois espaços métricos se distinguem é um direção natural quando deseja-se entender como se comporta sua geometria métrica e topologia (ver nessa direção, por exemplo, os trabalhos ([2], [4], [5],[6]). Por exemplo, se existem vizinhanças planas (ou convexas) de pontos sobre a superfície, as respectivas distâncias citadas são iguais. Outro exemplo relevante, ocorre nas vizinhanças de pontos regulares (do ponto de vista da topologia diferencial). Tais distâncias serão equivalentes, nesse caso. Isso se justifica pois na vizinhança de pontos regulares, a superfície se comporta, a menos de mudança de coordenadas, como seu espaço tangente (o que decorre do famoso teorema da função implícita ver [12]). De outro modo, no caso regular, temos que localmente a superfície não possui dobras nem entrelaçamentos. Sua topologia é trivial. Por esse motivo, estamos interessados em investigar (e entender) o que acontece na vizinhança de pontos não regulares sobre a superfície. Sobre esses pontos (ditos singulares) as respectivas distâncias associadas não precisam ser equivalentes. Por exemplo, considere a cúspide 1 dimensional descrita por $X=\{(x,y);\ x^2=y^3$, x e y números reais$\}$. Nesse caso, numa vizinhança de (0,0), distância induzida decresce com maior velocidade que distância intrínseca. Distância induzida tem ordem de desaparecimento 3/2 e distância intrínseca tem ordem de desaparecimento 1 próximo de (0,0). Note que (0,0) não é um ponto regular de C, pois as derivadas parciais da função $F(x,y)=x^2-y^3$ se anulam em (0,0). Se consideramos agora mesma equação de X em C, onde C denota o conjunto dos números complexos, teremos uma superfície real em R^4. Na vizinhança de (0,0) temos agora entrelaçamentos quando intersectamos X com esferas de raio cada vez menor centrados em (0,0). Esses entrelaçamentos permanecem constantes para qualquer raio. É conhecido que o tipo topológico de tais entrelaçamentos é totalmente determinado para equações analíticas da forma f(x,y)=0 em C^2 . (ver [1] para essas afirmações). Nesse trabalho, investigamos as superfícies chamadas regradas que são geradas por um par de curvas a 1-parãmetro: X(t,s)= alfa(t)+sw(t), onde a curva w é tal que para cada t_o que pertence ao domínio tem-se uma reta passando por alfa(t_o). Sobre tais superfícies, procuramos investigar quais resultados poderiam ser extraídos da forma: Tipo topológico caracteriza tipo Métrico ou Tipo métrico caracteriza tipo topológico.

METODOLOGIA

A partir dos encontros semanais, realizamos discussões sempre procurando abordar cada tópico e cada questionamento em sua totalidade. É buscado não deixar lacunas no processo para que a solidificação dos conhecimentos adquiridos por parte do bolsista possa ser usadas de maneira consistente e precisa. A cada encontro, notas em látex são produzidas para que cada tópico possa ser verificado e conectado em todos os momentos necessários. Com respeito a pesquisa em si, estamos prosseguindo da seguinte forma: Iremos (e já estamos) analisando superfícies parametrizadas de acordo com o posto da diferencial de F em 0. Se posto de DF(x,y)=2 em 0, então F é, localmente, uma imersão e um mergulho suave (ver [12]). Logo, a menos de mudança local suave de coordenadas, X é na vizinhança de 0 dado pela imagem da aplicação F(x,y)=(x,y,0,0). É esperado que o estudante entenda todos os detalhes destas afirmações.
Então, consideramos que posto de DF(x,y) em 0 é igual a 1. Com mudança de coordenadas, temos:$F(x,y)=(x,F_2(x,y),F_3(x,y),F_4(x,y))$. No trabalho [9], mostramos que C_0X está contido em um subespaço de dimensão 2 em R^4, a menos de mudança linear e analítica de coordenadas. Com o estudante, foi analisado o estudo do cone tangente para superfícies regradas. Trabalhamos inicial mente com cilindro generalizado, onde a curva geratriz deste está contida num plano. Para obter que d_i e d_e são metricamente equivalentes usou-se o fato da curva geratriz e das retas diretrizes serem LNE, por hipótese, então por comparação chegamos ao resultado desejado. Além disso, foi usada uma ideia em que consideramos os

ângulos que as retas diretrizes faziam com o plano que continha a curva geratriz do cilindro. Analogamente, para o cone generalizado utilizamos esse procedimento descrito anteriormente.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

1. Mesmo ainda em sua graduação, o estudante respondeu positivamente a tópicos recentes de pesquisa em geometria métrica e, junto com isso, já começa a entender como fazer pesquisa em Matemática. Tal projeto de pesquisa finalizado neste momento, já faz parte de sua bagagem estudantil e o permitirá trabalhar no que foi assimilado, abrindo seu leque de possibilidades no âmbito de sua formação.

2. Inserção do estudante no estudo da Geometria métrica (ou Lipschitz) de espaços singulares;

3. Foi obtido um critério completo que detecta quando duas curvas analíticas são metricamentes equivalentes a uma reta (esse resultado já foi estabilizado em [2]), mas se faz necessário para inserção e solidificação honesta para o estudo métrico de superfícies em espaços euclidianos;

4. O estudo métrico (ou Lipschitz) das superfícies regradas foi iniciado: O estudante estabeleceu condições completas de equivalência métrica para cilindros e cones generalizados a partir de curvas geratrizes nas superfícies regradas. Este tópico é algo novo que permitirá ao estudante em conjunto com o orientador produzir artigos de bom nível considerando avaliação Qualis-Capes.

CONCLUSÕES

O estudante e orientador já possuem material para produção de artigos em revistas científicas de boa qualidade no país. No entanto, optou-se por desenvolver mais ainda o tópico pesquisado pelos seguintes motivos: Aumentando o nível de futuras publicações do estudante da Unilab; Para que a pesquisa desenvolvida possa se consolidar em sua totalidade e caminhar com o estudante em todas as etapas de sua formação.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – PIBIC/UNILAB, pelo suporte financeiro que possibilitou a realização do projeto “Largura e Altura de superfícies de posto 1 em R^4”.

REFERÊNCIAS

[1] BRIESKORN, E; KNORRER, H. Plane Algebraic Curves, Birkhauser. 1986.
[2] BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A. Metric theory of semialgebraic curves. Rev. Mat. Complut., p. 369382, 2000.
[3] BIRBRAIR, L. bi-Lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets. Houston Journal of Mathematics, v. 25, n. 3, p.
453472, 1999.
[4] BIRBRAIR, L.; MOSTOWSKI, T. Normal embeddings of semialgebraic sets. Michigan
Math. J., p. 125132, 2000.

[5] FERNANDES, A. Topological equivalence of complex curves and bilipschtz
homeomorphisms. Michigan Math. J, v. 51, p. 593606, 2003.
[6] BIRBRAIR, L., MENDES, R.: Arc criterion of normal embedding. In: Advances in Singularities and Foliations: Geometry,
Topology and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics (2018)
[7] MENDES, R.: Geometria métrica e topologia de superfícies algebricamente parametrizadas. Tese de doutorado, UFC (2016).]
[8] SAMPAIO, J.E.; Bi-Lipschitz homeomorphic subanalytic sets have biLipschitz homeomorphic tangent cones. Selecta Math.
(N.S.), 22 (2016),
no. 2, 553559.
[9] BIRBRAIR, L., MENDES, R. & NUÑO-BALLESTEROS, J.J. J Geom Anal (2018). https://doi.org/10.1007/s12220-017-9973-2
[10] COLLI, E. Introdução a teoria dos nós. https://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/nos.pdf
[11]CROWELL, R.H and FOX, R.H: Introduction to knot theory, Ginn, 1963.
[12] LIMA, ELON LAGES Curso de análise. Vol. 2. (Portuguese). Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.
[13] MENDES, R and NUÑO-BALLESTEROS, J.J. Knots and the topology of singular surfaces in R^4. Contemporary mathematics
volume 675, 2016.