CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS NÃO DEGENERADOS VIA LEMA DE MORSE

Marcelo Henrique Felix da Silva [1], Alan Barros da Silva [2], Joserlan Perote da Silva [3]

RESUMO

O presente trabalho trata da Teoria de Singularidades. Foi desenvolvido durante um projeto de iniciação científica da UNILAB - PIBIC/UNILAB, sobre Singularidades de Aplicações Diferenciáveis com plano de trabalho intitulado Classificação de pontos críticos não degenerados via Lema de Morse. Tais classificações decorrem de um dos problemas centrais da Teoria de Singularidades. Podemos dizer que singularidade é algo singular, ou seja, remete a ideia de algo raro, que seja único. Na matemática quando se estuda funções, essa questão se apresenta facilmente, onde é visto como descrever estas funções a partir dos seus pontos críticos (onde a primeira derivada se anula). Uma consequência direta que se pode ter nesse estudo é como o gráfico de uma determinada função se comporta e em particular ajuda na localização de valores máximos e mínimos. Já na prática ocorrem em situações que exigem encontrar a solução para se maximizar ou minimizar alguma coisa, esta ultima aplicação por sua vez é mais conhecida como problema de otimização que quer dizer, encontrar a melhor maneira para se obter algo. E de certa forma, podemos dizer que a Teoria de Singularidades é uma extensão de vasto alcance do estudo de funções em pontos de máximo e mínimo.

Palavras-chave:

Aplicações diferenciáveis. Pontos críticos. Lema de Morse.

[1] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, e-mail: marcelohenriqueauto1@gmail.com
[2] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, e-mail: alanbarros770@gmail.com
[3] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, e-mail: joserlanperote@unilab.edu.br

INTRODUÇÃO

Atualmente, um dos mais produtivos e atraentes ramos da Matemática é a Teoria de Singularidades. Em Teoria de Singularidades um dos assuntos mais estudados são as classificações de tipos de pontos críticos, que se dividem em pontos críticos não degenerados e pontos críticos degenerados, um Teorema que garante estas classificações para o caso de pontos críticos não degenerados é o Teorema de Morse. Geometricamente existe a ocorrência de um ponto crítico em uma função quando o gráfico possui uma tangente horizontal. Um dos assuntos da teoria de singularidades que estudaremos é sobre funções em pontos de máximo e mínimo.

Para este estudo é necessário apresentar os elementos iniciais da Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis, as definições e resultados básicos, pontos críticos dessas aplicações, interpretação geométrica, bem como propriedades algébricas relevantes. Tendo como objeto de estudo aplicações diferenciáveis. Em particular, classificando os pontos críticos.

METODOLOGIA

Iniciamos este trabalho por meio de pesquisa bibliográfica, as pesquisas foram baseadas em artigos que tratavam sobre o tema do projeto, foi necessário também o uso de livros para revisão de assuntos que eram necessários para a construção da pesquisa.

Fizemos um estudo de assuntos que servem de base para a Teoria de Singularidades, como Derivadas Parciais, uma vez que este é uma ferramenta necessária para obtenção de pontos críticos a quais definiremos abaixo.

Dizemos que um ponto no domínio de uma função diferenciável é um ponto crítico, quando a derivada dessa função nesse ponto é zero. No caso de funções f: $R \to R$, quando existe o ponto crítico, esse pode ser de máximo, mínimo ou de inflexão. Percebemos esse comportamento com mais facilidade no gráfico da função, quando tratamos funções f: $R^2 \to R^2$, quando existe ponto crítico podemos classifica-lo em pontos críticos não degenerados e degenerados, e fazendo um estudo mais detalhado podemos refinar a classificação a pontos de máximo, mínimo ou de sela. Para se obter as classificações se faz necessário o uso de matriz hessiana.

Os casos possíveis a principio dependem do valor da Hessiana, para valores diferentes de zero no determinante temos pontos críticos não degenerados, para determinante igual a zero temos ponto degenerado.

Olhando mais atentamente no caso dos pontos não degenerados, o que definira se o ponto é de máximo, mínimo ou de sela, é se o valor do determinante é positivo ou negativo, para o valor positivo existem duas possibilidades: máximo ou mínimo e no caso de ser negativo afirma se diretamente que o ponto é de sela. Para o caso do determinante positivo o que definirá se o ponto é de máximo ou mínimo é o termo a_{11} da matriz hessiana. Quando o termo a_{11} for positivo tem se ponto de mínimo, para o termo negativo tem se ponto de máximo.

Em outras palavras os pontos críticos são ditos não degenerados quando a matriz hessiana possui determinante não nulo, a matriz hessiana é uma matriz quadrada onde os termos são as derivadas segundas parciais da função. É a partir do valor do determinante calculado da matriz que se consegue a classificação. Para o caso em que o determinante é nulo dizemos que o ponto crítico é degenerado.

Um Teorema que permite a classificação de pontos críticos não degenerados é o Lema de Morse, que diz:

Teorema: (Lema de Morse) Seja *u* pertencente ao R^n um ponto crítico não degenerado da função f: $R^n \rightarrow R$ de classe infinita. Então existe uma mudança de coordenadas ψ em R^n , isto é, uma função ψ: $U \rightarrow R^n$, onde *U* é uma vizinhança do ponto *u*, tal que a função $f \circ \psi$: $U \rightarrow R^n$ é dada por, $(f \circ \psi)(u) = f(u) - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \ldots + y_n^2$, para todo $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pertencente a *U*, $1 \leq l \leq n$.

Note que no caso n=2, temos as seguintes possibilidades:

1 - $(f \circ \psi)(u) = f(u) + X^2 + Y^2$

2 - $(f \circ \psi)(u) = f(u) + X^2 - Y^2$

3 - $(f \circ \psi)(u) = f(u) - X^2 - Y^2$

Observações:

1 - Não é necessário incluir a forma $f(u) - X^2 + Y^2$, pois (x,y) a (y,x) é uma mudança de coordenadas, o que significa que se trocando x por y e y por x se tem o mesmo resultado.

2 - Os três casos do Lema de Morse correspondem, respectivamente, a um mínimo, uma sela e um máximo para a função *f* em (0,0).

3 - O Lema de Morse diz que a função não apenas se comporta como uma das três formas normais acima, além disso, é igual a uma delas a menos de uma mudança de coordenadas no plano.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conseguimos cumprir o planejamento, de forma satisfatória. Alcançando os objetivos estabelecidos, entendendo conceitos básicos da Teoria de Singularidades e mais precisamente da classificação de pontos críticos não degenerados via Lema de Morse.

Por outro lado, foi necessário um aprofundamento em cálculo diferencial a qual facilitou a compreensão dos conceitos básicos da Teoria de Singularidades.

No projeto desenvolvemos todos os cálculos necessários para classificação de Pontos Críticos de funções diferenciáveis, tornando o trabalho importante para aqueles que tenha interesse nesse tipo de classificação.

CONCLUSÕES

Pode se provar que pontos críticos não degenerados são sempre isolados e estes por sua vez são completamente classificados por um Teorema, conhecido na literatura matemática como Lema de Morse.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por mais uma oportunidade no ambiente acadêmico.

Ao meu orientador Joserlan Perote, por todo apoio, incentivo e orientação, imprescindíveis na realização deste trabalho.

Ao colega de estudo de Singularidades Alan Barros, pelo incentivo durante esse período de estudo.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

REFERÊNCIAS

[1] Henrique, Carlos e Carlos, Antônio. FAMAT em Revista - Número 09, Uma Introdução à Teoria de Pontos Críticos, Outubro de 2007.

[2] José, Marcelo. Artigo, Uma introdução à Teoria de Singularidades, São Carlos SP, Abril de 2011.