ISSN: 2447-6161

CAMPOS DE VETORES CONFORMES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Erika Joyce Silva Lima [1], João Francisco da Silva Filho [2]

RESUMO

O presente trabalho realiza um estudo sobre os campos de vetores conformes sobre o espaço Euclidiano, enfatizando e explorando, principalmente as relações existentes com as funções reais harmônicas e as funções complexas holomorfas, dando um tratamento especial ao caso particular dos campos conformes fechados e campos conformes gradientes. Os campos conformes sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores cuja derivada de Lie é um múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço, no entanto podemos introduzir uma definição mais elementar ao tratarmos do espaço Euclidiano e naturalmente, esta definição deve coincidir com a definição geral que refere-se a espaços Riemannianos. Deve-se ressaltar que o estudo dos campos de vetores conformes está relacionado ao estudo de algumas estruturas geométricas que vem sendo bastante exploradas na literatura nas últimas décadas, podemos citar como exemplos: solitons de Ricci, quase solitons de Ricci, variedades quasi-Einstein e solitons de Yamabe.

Palavras-chave:

Espaço Euclidiano. Campos Conformes. Fator Conforme.

---

[1] UNILAB, ICEN, Discente, e-mail: erikajoyce.8@gmail.com
[2] UNILAB, ICEN, Docente, e-mail: joaofilho@unilab.edu.br

ISSN: 2447-6161

INTRODUÇÃO

O espaço Euclidiano é um espaço Riemanniano completo, simplesmente conexo e que possui curvatura seccional constante nula, corresponde portanto a um exemplo de *forma espacial* (ou *space form*). Deve-se ressaltar que, o espaço Euclidiano é um espaço Riemanniano homogêneo e constitui um exemplo de variedade de Einstein, ou seja, um espaço Riemanniano cujo tensor de Ricci é múltiplo da sua métrica Riemanniana.

Os campos de vetores conformes sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores, cuja derivada de Lie resulta em um tensor que é múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço. Estes campos de vetores correspondem a uma generalização dos campos de Killing e dos campos homotéticos, já que os campos de Killing são campos conformes com fator conforme nulo, enquanto os campos homotéticos são campos conformes com fator conforme constante.

Os campos de vetores supracitados aparecem na Geometria Diferencial, principalmente no estudo de imersões sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera e espaço Hiperbólico), nos produtos diretos, produtos-warped, espaços Riemannianos homogêneos, espaços de Einstein e em alguns fluxos geométricos (fluxo de Yamabe e fluxo de Ricci). Estes campos de vetores também estão diretamente relacionados à curvatura escalar do espaço Riemanniano, no qual estão definidos, conforme podemos conferir nos trabalhos de Tashiro (1965) e Obata/Yano (1970).

Num certo sentido, podemos afirmar que os campos conformes generalizam os solitons de Yamabe, que são estruturas geradas por campos conformes particulares, cujo fator conforme (ou fator de conformidade) difere da curvatura escalar por uma constante. Deve-se observar ainda que os campos conformes constituem um caso particular de quase solitons de Ricci e no espaço Euclidiano, estas estruturas coincidem, visto que o espaço Euclidiano é uma variedade de Einstein.

No espaço Euclidiano, podemos encontrar diversos exemplos de campos conformes (gradientes e não-gradientes), bem como seus casos particulares que são os campos de Killing e os campos conformes fechados, destacamos os exemplos construídos por Heintze (1988). Por fim, devemos ressaltar que no espaço Euclidiano, as definições associadas a campos conformes tornam-se mais elementares que as usadas em espaços Riemannianos.

METODOLOGIA

O projeto foi desenvolvido por meio de uma cuidadosa pesquisa realizada em livros e periódicos que abordam a temática proposta. Durante a execução da pesquisa, foram realizados seminários semanais para discussões, esclarecimentos de dúvidas, acompanhamento das atividades previstas e planejamento das atividades futuras. Como consequência destes seminários, foi produzido um material contendo notas de aulas, exercícios e aplicações de campos conformes no espaço Euclidiano. Convém ressaltar que as ferramentas usadas nesta abordagem foram bem mais elementares do que costuma-se encontrar na literatura.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiramente, foram revisitados os principais resultados sobre campos conformes no espaço Euclidiano disponíveis na literatura, no intuito de reunir elementos que permitissem chegar à expressão polinomial da função potencial que descreve todos os campos conformes gradientes no espaço Euclidiano. Esta expressão polinomial varia conforme a dimensão do espaço, visto que o número de variáveis coincide com a dimensão do referido espaço.

Na sequência, provamos que todos os campos conformes fechados no Espaço Euclidiano são necessariamente gradientes, também verificamos uma importante relação entre as funções complexas holomorfas e os campos conformes no espaço Euclidiano. Esta última relação nos permite construir, de forma prática, exemplos de campos conformes no espaço Euclidiano. Deve-se pontuar que embora os resultados supracitados sejam conhecidos na literatura, apresentamos uma forma alternativa de demonstrá-los, usando ferramentas mais elementares, restritos apenas a Cálculo Diferencial e Vetorial.

CONCLUSÕES

Geralmente a abordagem dos campos de vetores conformes é feita a partir de ferramentas mais complexas e linguagem mais sofisticada, que exige um conhecimento prévio sobre variedades diferenciáveis e noções de Geometria Riemanniana. Neste trabalho, mostramos ser possível realizar uma abordagem bem mais elementar sobre campos de vetores conformes e apresentar seus principais resultados, usando apenas conceitos de Cálculo Vetorial e ferramentas de Cálculo Diferencial no espaço Euclidiano *n*-dimensional, tornando o referido conteúdo bem mais acessível a um aluno de Graduação.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – PIBIC/UNILAB, pelo suporte financeiro que possibilitou a realização do projeto “Campos de Vetores Conformes no Espaço Euclidiano”.

REFERÊNCIAS

BESSE, A. Einstein Manifolds. Berlin: Spring-Verlag, 2018. (Classic Mathematics).

HAMILTON, R. S. The Ricci flow in dimension three. *Journal Diferential Geometry*, v. 17, p. 255-306, 1982.

HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ1. *Mathematische Annalen*, v. 280, p. 389-402, 1988.

LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer-Verlag, 2002. (New Yourk Graduate Texts in Mathematics, v. 218.).

OBATA, M.; YANO, K. Conformal change of Riemannian metrics. Journal Differential Geometry, v. 4, p. 53-72, 1970.

OBATA, M. Certains condictions for a Riemannian Manifold to be isometric to be isometric with a sphere. *Journal of Mathematical Society of Japan*, v. 14, p. 333-340, 1962.

OLIVEIRA, F. E; PEREIRA, O. E.; SILVA, M. B.; SILVA Filho, J. F. S. Campos Conformes Gradientes no Espaço Hiperbólico. Acarape, 2017. Artigo (Submetido).

SILVA Filho, J. F. Quasi-Einstein manifolds endowed with a parallel vector Field. *Monatshefte fur Mathematik,* v. 178 (2015). p. 01-16.

SILVA Filho, J. F. Some uniqueness results for Ricci solitons. *Illinois Jounal of Mathematics,* v. 61 (2018). p. 399-413.

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 117, p. 251-275, 1965.

ISSN: 2447-6161